Anmerkungen zur Speziellen Relativitätstheorie

Inhalt

1. Übersicht

Man kann den formalen Inhalt der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) in den Worten zusammenfassen: „Um die Werte physikalischer Größen aus einem Inertialsystem in ein relativ zum ersten bewegtes anderes Inertialsystemen umzuberechnen, sind die Lorentztransformationen zu verwenden.“ An die Spitze seiner Untersuchungen stellte Einstein das „Spezielle Relativitätsprinzip“ und das „Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit“, die demnach als physikalische Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie zu betrachten wären. Wir werden jedoch zeigen, dass das Relativitätsprinzip zur Herleitung der Lorentztransformationen nicht benötigt wird. Stattdessen formulieren wir ein „Geometriepostulat“, das Einstein implizit verwendet aber nicht ausdrücklich ausgesprochen hat.

Neben der Darstellung der physikalischen Annahmen, welche der Speziellen Relativitätstheorie zugrunde liegen, diskutieren wir im ersten, physikalischen Teil dieser Abhandlung den Gültigkeitsbereich der SRT und seine Grenzen, sowie das von Einstein vorgeschlagene Verfahren zur Synchronisation von Uhren.

Der zweite Teil der Abhandlung befasst sich mit den Schlussfolgerungen, die ohne weitere physikalische Überlegungen, allein durch konsequentes Rechnen, aus dem ersten Teil gezogen werden können. Zunächst beschreiben wir, wie Einstein aus den grundlegenden Annahmen die Lorentztransformationen und die daraus folgende Invariante Länge der Speziellen Relativitätstheorie ableitete. Wir betonen dabei besonders, dass er dazu nur das Prinzip von der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, sowie implizit das Geometriepostulat verwendete, jedoch nicht das Relativitätsprinzip.

Als Schlussfolgerungen aus den Lorentztransformationen entwickeln wir anschließend das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten, beschreiben Zeitdilatation und Längenkontraktion, und diskutieren zum Schluss zwei der zahlreichen Paradoxa der Speziellen Relativitätstheorie: Zunächst die Fahrt eines Zuges durch einen Tunnel, dann in großer Ausführlichkeit das bekannte Zwillingsparadox. Beide erweisen sich – wie alle anderen Paradoxa der SRT auch – bei hinreichend sorgfältiger Analyse als lediglich scheinbare Inkonsistenzen.

2. Physikalischer Teil

2.1. Prinzipien

Am Anfang der 1905 veröffentlichten Speziellen Relativitätstheorie [1] stehen zwei grundlegende Annahmen, die Einstein ausdrücklich als die „Voraussetzungen“ bezeichnet, „auf die sich die folgenden Überlegungen stützen“. Er formuliert die beiden Annahmen folgendermaßen:

A Das Relativitätsprinzip: Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Zustandsänderungen bezogen werden.

B Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Jedes Lichtsignal bewegt sich im „ruhenden“ Koordinatensystem mit der bestimmten Geschwindigkeit V, unabhängig davon, ob dieses Lichtsignal von einem ruhenden oder bewegten Körper emittiert wurde.

Tatsächlich benutzte Einstein eine Fülle weiterer Annahmen und Begriffe, die er (und seine Leser) für so selbstverständlich und unbezweifelbar hielten, dass eine besondere Erwähnung überflüssig erschien. Das kann auch nicht anders sein. Wer eine physikalische Abhandlung mit einer vollständigen Aufzählung aller zugrundeliegenden Annahmen beginnen wollte, müsste viele dicke Bücher schreiben, und wer gar in Strenge die Bedeutung und Gültigkeit jedes Begriffs klären wollte, der würde in einem infiniten Regress enden. Die Kunst besteht also darin, aus der Fülle der Voraussetzungen die wenigen zu identifizieren und klar herauszustellen, die einerseits nicht allgemein als selbstverständlich anerkannt und andererseits für die Thesen der Abhandlung bedeutsam sind.

Hätte Einstein 1905 bereits über das Wissen verfügt, das er sich in den folgenden zehn Jahren bei der Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie aneignete, so hätte er zweifellos als dritte grundlegende Annahme der Speziellen Relativitätstheorie die Gültigkeit der Euklidischen Geometrie erwähnt. Mit „Gültigkeit“ ist dabei „Realisierbarkeit“ gemeint. Es ist eine wesentliche Forderung Einsteins, dass Koordinatensysteme nicht nur irgendwie gedacht, sondern ganz handfest messtechnisch realisiert werden müssen. Dazu werden an verschiedenen Stellen des Raumes Uhren aufgestellt und abgelesen, die Abstände zwischen den Uhren werden mit starren Maßstäben ausgemessen, kartesische Koordinatensysteme werden durch starre Stäbe realisiert. Das ist nur möglich, wenn die starren (und prinzipiell ins Unendliche verlängerten) Stäbe Realisierungen Euklidischer Gerader sind, wenn die Summe der Innenwinkel eines aus den Stäben gebildeten Dreiecks tatsächlich (im Bogenmaß) π beträgt, wenn klar definiert ist was es bedeutet, dass zwei Stäbe „parallel“ ausgerichtet werden sollen.

1905 hielt man es noch für selbstverständlich, dass die Euklidische Geometrie (zumindest im Prinzip) durch starre Stäbe realisiert werden kann. Heute wissen wir dank Einsteins späteren Untersuchungen, dass dies nur unter bestimmten Bedingungen und in begrenzten Raumbereichen näherungsweise möglich ist. Und wir haben gelernt, dass Lichtstrahlen wesentlich leichter realisierbare Annäherungen an Euklidische Gerade darstellen als starre Stäbe. Deshalb formulieren wir als weitere grundlegende Annahme der Speziellen Relativitätstheorie:

C Das Geometriepostulat: Lichtstrahlen sind Realisierungen von Geraden der von Euklid [2] beschriebenen und von Hilbert [3] wesentlich präziser definierten Euklidischen Geometrie.

Annahme **B** ist redundant formuliert. Wenn jedes Lichtsignal sich mit der bestimmten Geschwindigkeit[1] V bewegt, dann ist V selbstverständlich von der Geschwindigkeit der Quelle unabhängig. Einstein weist deshalb doppelt nachdrücklich darauf hin, weil seinerzeit eine Hypothese von Walter Ritz diskutiert wurde, der bemerkt hatte dass die Ergebnisse der Interferenzexperimente von Michelson und Morley auch damit erklärt werden könnten dass die Geschwindigkeit des Lichts von der Geschwindigkeit der Quelle abhängt. Ritz' Hypothese wurde in den folgenden Jahren – abgesehen davon dass sie eine Fülle neuer Probleme mit sich gebracht hätte – durch astronomische Beobachtungen ausgeschlossen. Deshalb halten wir eine besondere Erwähnung dieser Hypothese für überflüssig.

Zweitens stört uns an Einsteins Formulierung von **B**, dass er vom „ruhenden" Koordinatensystem spricht, was leicht missverstanden werden kann. Aus dem Zusammenhang seiner Abhandlung geht unzweifelhaft hervor, dass nach seiner Überzeugung die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum in jedem beliebigen Inertialsystem den immer gleichen Wert c hat. Deshalb formulieren wir einfacher und klarer:

B' Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Ein elektromagnetisches Signal im Vakuum hat in jedem Inertialsystem die gleiche Geschwindigkeit c.

Annahmen der Art **A**,**B'**,**C** lassen sich weder herleiten noch beweisen. Einstein erriet sie, wobei er sich selbstverständlich von den experimentellen Tatsachen in die richtige Richtung lenken ließ, was bei Annahme **B'** deutlicher sichtbar ist als bei Annahme **A**. Überprüft werden können solche Annahmen nur dadurch, dass man Schlussfolgerungen aus ihnen ableitet, die, wenn sie falsch sind, durch Experimente widerlegt werden können. Haben die Annahmen

[1] Wir werden in diesem Aufsatz statt Einsteins Buchstaben V für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum den heute üblicheren Buchstaben c verwenden.

und die aus ihnen abgeleiteten Schlussfolgerungen viele derartige Prüfungen bestanden ohne widerlegt zu werden, dann bestärkt dies unser Vertrauen in die Korrektheit der Annahmen, und wir bezeichnen solche Annahmen als Naturgesetze. Ein „Beweis“ im strengen Sinn des Wortes kann aber für die Richtigkeit eines Naturgesetzes mit endlich vielen Überprüfungen nicht erbracht werden.

Da – wie wir gleich zeigen werden – aus den Annahmen **B’** und **C** die Lorentztransformationen abgeleitet werden können, sind diese Transformationen – aber nicht die Galileitransformationen – in allen Gebieten der Physik anzuwenden, in denen diese grundlegenden Annahmen gelten. Also auch in der Mechanik, nicht nur in der Elektrodynamik.

Wenn man die Lorentztransformationen zur Umrechnung physikalischer Größen zwischen relativ zueinander bewegten Inertialsystemen verwendet, dann findet man regelmäßig gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

Das Relativitätsprinzip (Annahme **A**) hat Einstein zur Herleitung der Lorentztransformationen überhaupt nicht benötigt, Annahmen **B’** und **C** allein sind dazu ausreichend. Dass er ein Relativitätsprinzip an den Anfang seiner Publikation der Speziellen Relativitätstheorie stellt, illustriert seine Motivation und seine Gedankenwelt zu jener Zeit. Aber an keiner Stelle seiner Abhandlung zieht er irgendeinen formalen Schluss daraus. Bei der Herleitung der Lorentztransformationen stützt er sich – wie wir im Abschnitt 3.1 explizit Schritt für Schritt nachverfolgen werden – ausschließlich auf Annahme **B’** und (die von ihm nur implizit verwendete) Annahme **C**. Das Relativitätsprinzip **A** gehört *nicht* zu den Voraussetzungen der Speziellen Relativitätstheorie.[2]

[2] Erst lange nach Abschluss dieser kleinen Arbeit wurde ich auf eine Bemerkung aufmerksam, die Einstein selbst elf Jahre nach Veröffentlichung der Speziellen Relativitätstheorie machte. In einem Artikel über die Allgemeine Relativitätstheorie [4] schreibt er auf Seite 770 :

2.2. Inertialsysteme

„Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichmäßig-gradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch Kräfte, die auf ihn einwirken, gezwungen wird diesen Zustand zu ändern“, schreibt Newton in den Principia [5, Axiome, oder Gesetze der Bewegung; Gesetz 1]. Unter äußeren „Kräften, die auf ihn einwirken“ versteht er dabei Schwerkraft, Druck, Stoß, magnetische und elektrische Kräfte, ... Heute würden wir sagen: Gravitative, Elektroschwache, oder Starke Wechselwirkung. Kräfte, die keine äußeren Kräfte sind,

„Der Speziellen Relativitätstheorie liegt folgendes Postulat zugrunde, welchem auch durch die Galilei-Newtonsche Mechanik Genüge geleistet wird: Wird ein Koordinatensystem K so gewählt, dass in Bezug auf dasselbe die physikalischen Gesetze in ihrer einfachsten Form gelten, so gelten *dieselben* Gesetze auch in Bezug auf jedes andere Koordinatensystem K', das relativ zu K in gleichförmiger Translationsbewegung begriffen ist. Dieses Postulat nennen wir „spezielles Relativitätsprinzip“. Durch das Wort „speziell“ soll angedeutet werden, dass das Prinzip auf den Fall beschränkt ist, dass K' eine *gleichförmige Translationsbewegung* gegen K ausführt, dass sich aber die Gleichwertigkeit von K' und K nicht auf den Fall *ungleichförmiger* Bewegung von K' gegen K erstreckt. Die spezielle Relativitätstheorie weicht also von der klassischen Mechanik nicht durch das Relativitätspostulat ab, sondern allein durch das Postulat von der Konstanz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, aus welchem im Verein mit dem speziellen Relativitätsprinzip die Relativität der Gleichzeitigkeit sowie die Lorentztransformation und die mit dieser verknüpften Gesetze über das Verhalten bewegter starrer Körper und Uhren in bekannter Weise folgen.“

So ist das also gemeint: Grundlage der Speziellen Relativitätstheorie ist einerseits das Prinzip **B’** der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, andererseits die klassische Newton’sche Mechanik und die klassische Maxwell’sche Elektrodynamik. Bestandteile dieser beiden klassischen Theorien sind das Spezielle Relativitätsprinzip **A** und die Annahme **C** der Gültigkeit der Euklidischen Geometrie, die deshalb zu den „selbstverständlichen“ Voraussetzungen gehören, die nicht unbedingt explizit erwähnt werden müssen. Es wäre interessant zu wissen, ob Einstein diese Erläuterung als Korrektur seiner Arbeit von 1905 verstand, oder lediglich als Klarstellung einer stark missverständlichen Formulierung.

sind Trägheitskräfte. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird Einstein Trägheitskraft und Schwerkraft als identisch betrachten („Äquivalenzprinzip"), in der Speziellen Relativitätstheorie hält er aber noch an Newtons Kraftbegriff fest, nach dem die Gravitation als äußere Kraft von Trägheitskräften zu unterscheiden ist.

Wenn in einem Bezugssystem alle Körper, auf die keine äußeren Kräfte einwirken, im Zustand der Ruhe oder der gleichmäßig-gradlinigen Bewegung verharren, dann ist dies Bezugssystem per Definition ein *Inertialsystem*. Wenn umgekehrt in einem Bezugssystem ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte einwirken, sich beschleunigt bewegt, dann ist dies Bezugssystem per Definition ein *beschleunigtes Bezugssystem*, und die Kraft, die die Beschleunigung des Körpers bewirkt, wird als *Trägheitskraft* bezeichnet.

Nirgendwo in [1] benutzt Einstein den Begriff „Inertialsystem". In seiner Formulierung des Relativitätsprinzips spricht er lediglich von „zwei relativ zueinander in gleichförmiger Translationsbewegung befindlichen Koordinatensystemen". Aus dem Zusammenhang ist dennoch klar, dass die Spezielle Relativitätstheorie von relativ zueinander bewegten Inertialsystemen handelt, nicht von beschleunigten Bezugssystemen. Am Beginn von Teil I § 1 seines Artikels spezifiziert Einstein „ein Koordinatensystem, in welchem die Newtonschen mechanischen Gleichungen gelten." Diese Einschränkung kann man eigentlich nur so verstehen, dass er ein Koordinatensystem meint in dem keine Trägheitskräfte wirken. Denn wenn man Trägheitskräfte berücksichtigt, dann gelten die Newtonschen mechanischen Gleichungen in jedem beliebigen Koordinatensystem, und Einsteins Formulierung ergäbe überhaupt keinen Sinn. Indirekt wird auch im Fortgang seiner Argumentation deutlich, dass er von Inertialsystemen spricht, siehe Fußnote 6 auf Seite 15.

2.3. Der Gültigkeitsbereich der SRT

Das Prinzip **B'** der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit macht keinerlei Einschränkung hinsichtlich Zeitpunkt, Ort, oder Richtung der Lichtausbreitung. Zu jeder Zeit, an jedem Ort, in jeder Richtung bewegt sich ein elektromagnetisches Signal im Vakuum mit der immer gleichen Geschwindigkeit c. Daraus folgt nicht, dass auch die Zeit und der Raum homogen und isotrop sein müssen. Denn c ist ja der Quotient des Weges, den das Licht zurücklegt, und des Zeitraums, den es dafür braucht. Wenn in einer Gegend der Raum geschrumpft wäre, dann könnte die Lichtgeschwindigkeit dennoch den gleichen Wert wie anderswo haben, wenn nur die Zeit in diesem Raumbereich entsprechend geschrumpft ist, Uhren also langsamer gehen als anderswo.

Allerdings würden gemäß des Fermat'schen Prinzips Lichtstrahlen, die aus der Umgebung in diesen geschrumpften Raumbereich eintreten, gebrochen werden. Lichtstrahlen wären also keine Realisierung Euklidischer Gerader, im Widerspruch zum Geometriepostulat, Annahme **C**. Heute kennen wir Gravitationslinsen, wir wissen dass Lichtstrahlen am Rand der Sonne gebrochen werden. Der Raum ist also tatsächlich nicht homogen, sondern stellenweise geschrumpft. Die Spezielle Relativitätstheorie gilt deshalb nicht überall, sondern nur dort, wo – bzw. in dem Maße, wie – ihre Voraussetzungen **B'** *und* **C** erfüllt sind. **B'** gilt nach heutigem Wissen immer und überall genau. **C** ist dagegen eine Näherung, die nirgends in aller Strenge und Genauigkeit stimmt. Der Anwendungs- und Gültigkeitsbereich der Speziellen Relativitätstheorie wird also durch **C** definiert: Die Spezielle Relativitätstheorie ist mit der Genauigkeit richtig, mit der Voraussetzung **C** stimmt.

Wo die Spezielle Relativitätstheorie gilt, dort gibt es keine Gravitationslinsen. Gravitationslinsen gibt es überall, wo der Raum inhomogen und/oder anisotrop ist. Also ist der Raum überall, wo die Spezielle Relativitätstheorie gilt, homogen und isotrop. Die Zeit muss in diesem Fall, als Quotient des homogenen und isotropen Raumes und der immer und überall gleichen Lichtgeschwindigkeit, ebenfalls homogen sein.

2.4. Synchronisation von Uhren

Das Prinzip **B'** der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit scheint zunächst unzähligen Beobachtungen der Mechanik zu widersprechen. Andererseits legten die Experimente von Michelson und Morley genau diese Annahme nahe. Einstein erkannte, dass die Widersprüche zwischen **B'** und den Erfahrungstatsachen der Mechanik verschwinden, wenn bewegte Maßstäbe kürzer sind als ruhende Maßstäbe, und wenn bewegte Uhren langsamer gehen als ruhende Uhren. Wir müssen also – Einsteins Gedankengang folgend – zunächst klarstellen, wie Raum, Zeit, und Geschwindigkeit zu messen sind, und dabei besonders darauf achten ob Maßstäbe und Uhren in Ruhe sind oder bewegt werden.

Entfernungen zwischen *ruhenden* Punkten sind nach Einstein wie eh und je dadurch zu messen, dass starre Maßstäbe (z.B. Kopien des Urmeters) aneinander angelegt werden und abgezählt wird, wie viele Maßstäbe mindestens angelegt werden müssen um die Entfernung zwischen einem Punkte r_a und einem Punkt r_b zu überbrücken. Prinzipiell gleichwertig können wir Einsteins starre Maßstäbe auch durch folgendes Verfahren[3] ersetzen: Wir senden von r_a ein elektromagnetisches Signal in Richtung r_b. Am Punkt r_b wird das Signal durch einen Spiegel nach r_a zurückreflektiert. Die Zeit t_{aba}, die das Signal für den Weg von r_a nach r_b und zurück braucht, wird mit einer Uhr gemessen, die am Punkt r_a ruht. Da

[3] Die derzeit (2010) geltende Vereinbarung [6] besagt: „Das Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von (1/299 792 458) Sekunden durchläuft.“

die Geschwindigkeit des Signals nach Annahme **B'** gleich c ist, ergibt sich für die Lichtlaufzeit

$$t_{aba} = \frac{2 \cdot D}{c} \quad \text{mit } D \equiv \text{Distanz zwischen } r_a \text{ und } r_b \; . \tag{1}$$

Die Distanz zwischen r_a und r_b ist dann [3]

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{t_{aba}}{\text{Sekunde}} \cdot 299\,792\,458\,\text{Meter} \; . \tag{2}$$

Ebenso einfach ist die Messung der Zeit. Sie wird gemessen durch Abzählen periodischer Vorgänge, z.B. der Schwingungen der Unruhe einer Armbanduhr, oder der Schwingungen eines Mikrowellenresonators welcher auf den 9.192 631 770 GHz-Übergang im atomaren Grundzustand von ^{133}Cs abgestimmt ist.[4] Auch hier ist die wichtige Einschränkung zu beachten: Die Uhren müssen sich im verwendeten Koordinatensystem in Ruhe befinden.

Problematisch wird es bei der Messung von Geschwindigkeiten. Die durchschnittliche Geschwindigkeit v eines Objekts, das sich zur Zeit t_0 vom Ort r_a aus in Richtung r_b bewegt und dort zur Zeit t_1 eintrifft, ist

$$v = \frac{D}{t_1 - t_0} \quad \text{mit } D \equiv \text{Distanz zwischen } r_a \text{ und } r_b \; . \tag{3}$$

Das Problem entsteht dadurch, dass wir den Zeitpunkt von Ereignissen mit Uhren messen wollen, die sich am Ort der Ereignisse in Ruhe befinden. Der Start des Objekts am Ort r_a ist ein Ereignis, und das Eintreffen des Objekts am Ort r_b ist ein zweites Ereignis. Und wir haben den Verdacht – der im Folgenden auch bestätigt

---

[4] Nach der derzeit (2010) geltenden Vereinbarung [6] ist die „Sekunde das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.“

wird – , dass bewegte Uhren anders gehen als ruhende. Deshalb muss die Zeit t_0 mit einer Uhr gemessen werden, die sich am Ort r_a in Ruhe befindet, und die Zeit t_1 muss mit einer Uhr gemessen werden, die sich am Ort r_b in Ruhe befindet. Nun ist es kein Problem, bei r_a und r_b je eine Uhr aufzustellen, aber eine brauchbare Messung der Geschwindigkeit wird nur gelingen, wenn die beiden Uhren synchronisiert sind. Man kann die Synchronisation nicht dadurch erzielen, dass man mehrere Uhren an einem Ort versammelt, sie synchronisiert, und dann zu verschiedenen Standpunkten transportiert. Denn jeglicher Transport zerstört die Synchronisation von Uhren. 1905 konnte Einstein diese Tatsache nur indirekt erschließen, seit den Siebziger Jahren des 20. Jahrhunderts ist der direkte experimentelle Nachweis möglich und mehrfach geführt worden.

Wollte man alternativ beide Ereignisse, den Start bei r_a und das Eintreffen bei r_b mit derselben Uhr – beispielsweise der am Punkt r_a ruhenden Uhr – messen, so bräuchte man zusätzlich ein Signal, welches das Ereignis vom Punkt r_b zum Punkt r_a meldet, und eine Theorie der Übertragungszeit die dieses Signal benötigt. „Aber so ein Signal mit bekannter Übertragungsgeschwindigkeit c haben wir doch in Form von Lichtsignalen“ könnte man im ersten Moment denken. Das stimmt aber nicht, wir wissen (oder vermuten) lediglich, dass c eine wohldefinierte Naturkonstante ist, aber wir kennen *nicht* ihren Zahlenwert.[5] Der in Fußnote 3 auftauchende Zahlenwert 299 792 458 ist Teil der *Definition* des Meters, er ist kein Messwert. Trotzdem sind wir mit der Analogie zur Entfernungsmessung auf der richtigen Spur. Das von Einstein vorgeschlagene Verfahren [1] zur Synchronisation von zwei Uhren, die sich in einem Inertialsystem an den Orten r_a und r_b in Ruhe befinden (sich also weder

[5] Natürlich kennen wir den Wert der Lichtgeschwindigkeit so ungefähr, aber es geht hier ums Prinzip!

relativ zueinander noch relativ zum Inertialsystem bewegen), ist dem Verfahren zur Entfernungsmessung sehr ähnlich:

Wenn die Uhr am Ort r_a die Zeit t_0 anzeigt, wird von r_a ein Lichtsignal in Richtung r_b emittiert. Durch einen Spiegel am Ort r_b wird das Signal in Richtung r_a reflektiert. Im Moment der Reflektion zeigt die Uhr am Ort r_b die Zeit t_1 an. Das reflektierte Signal wird am Ort r_a detektiert. Im Moment der Detektion zeigt die Uhr am Ort r_a die Zeit t_2 an.

Da das Signal die Distanz D zwischen r_a und r_b nach dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (Annahme **B'**) auf dem Hin- und Rückweg gleich schnell – nämlich mit der in jedem Bezugssystem gleichen Geschwindigkeit c – durchläuft, muss auch die

$$\text{Lichtlaufzeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}}$$

von Hin- und Rückweg gleich sein, also

$$t_1 - t_0 = \frac{D}{c} = t_2 - t_1 \tag{4a}$$

gelten. Zur Synchronisation sind die Uhren deshalb auf

$$t_1 = \frac{1}{2}(t_2 + t_0) \tag{4b}$$

einzustellen.

Beiläufig ergibt sich aus diesem Verfahren eine Definition des Begriffs „gleichzeitig“. Ein Ereignis mit den Raumzeitkoordinaten (t_a, x_a, y_a, z_a) ist *per Definition* gleichzeitig mit einem Ereignis mit den Raumzeitkoordinaten (t_b, x_b, y_b, z_b), wenn Uhren, die gemäß (4) synchronisiert sind, an den beiden Raumzeitpunkten die gleiche Zeit anzeigen.

Da die Synchronisation nur innerhalb eines Inertialsystems definiert ist, aber nicht zwischen zwei Inertialsystemen die sich relativ zueinander bewegen, ist auch der Begriff „gleichzeitig" nur innerhalb eines Inertialsystems definiert, aber nicht zwischen zwei Inertialsystemen die sich relativ zueinander bewegen. Wir werden sehen, dass zwei Ereignisse, die in einem Inertialsystem gleichzeitig stattfinden, in einem relativ dazu bewegten Inertialsystem *nicht* gleichzeitig sind, siehe Seite 31 .

3. Schlussfolgerungen

3.1. Ableitung der Lorentztransformationen aus den Annahmen B' und C

Wir wollen zeigen, dass aus den beiden Postulaten

B' Das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: Ein elektromagnetisches Signal im Vakuum hat in jedem Inertialsystem die gleiche Geschwindigkeit c .

C Das Geometriepostulat: Lichtstrahlen sind Realisierungen von Geraden der von Euklid [2] beschriebenen und von Hilbert [3] wesentlich präziser definierten Euklidischen Geometrie.

ohne Zuhilfenahme eines zusätzlichen „Relativitätsprinzips" die Lorentztransformationen abgeleitet werden können. Wir folgen dabei genauestens Einsteins Darstellung [1]. Einstein hat also bei der Herleitung der Lorentztransformationen keinen Gebrauch vom „Relativitätsprinzip" gemacht.

Ein Inertialsystem, das wir durch einen Strich$'$ kennzeichnen, bewege sich relativ zu einem anderen Inertialsystem, das in unserer Notation keinen Strich trägt, mit der gleichmäßigen Geschwindigkeit v in eine beliebige Richtung des dreidimensionalen Raumes.

Im ungestrichenen System definieren wir ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem so, dass seine x-Achse parallel und gleichgerichtet zur Relativgeschwindigkeit v des gestrichenen Koordinatensystems ist. Die Komponenten der Geschwindigkeit v

des gestrichenen Koordinatensystems, gemessen im ungestrichenen System, sind also

$$(v_x, v_y, v_z) = (v, 0, 0) \ . \tag{5}$$

Die y- und z-Achsen des ungestrichenen Koordinatensystems werden beliebig festgelegt, ebenso sein Nullpunkt.

Im gestrichenen Inertialsystem definieren wir ebenfalls ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem, das im gestrichenen System in Ruhe ist. Seinen Nullpunkt positionieren wir beliebig. Seine x'-Achse orientieren wir parallel und richtungsgleich zur ungestrichenen x-Achse, die y'-Achse parallel und richtungsgleich zur y-Achse, und die z'-Achse parallel und richtungsgleich zur z-Achse.[6]

Gesucht ist die Umrechnung zwischen den Koordinaten-Quadrupeln (t, x, y, z) und (t', x', y', z'). Dazu bestimmte Einstein zunächst die gestrichene Zeit als Funktion der ungestrichenen Koordinaten, also $t'(t, x, y, z)$.

Ein Lichtsignal werde beim Raumzeitpunkt

$$(t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0) \tag{6}$$

parallel zur positiven x'- bzw. x-Achse gestartet. Bei (t'_S, x'_S, y'_0, z'_0) trifft das Signal auf einen Spiegel, der es zurück in Richtung der Quelle reflektiert. Der Spiegel ist im gestrichenen System fixiert, bewegt sich also im ungestrichenen System mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung.

Im ungestrichenen System hat der Spiegel zur Zeit t_0 die Koordinaten (t_0, x_S, y_0, z_0). Zu einer beliebigen Zeit t hat er die Koordinaten $(t, x_S + v(t - t_0), y_0, z_0)$. Das Lichtsignal erreicht den Spiegel

[6] An dieser Stelle machte Einstein implizit davon Gebrauch, dass es sich bei beiden Koordinatensystemen um Inertialsysteme handelt. Andernfalls wäre der Raum nicht euklidisch, und man könnte die Koordinatenachsen nicht „parallel“ ausrichten, denn es wäre nicht einmal klar was der Begriff „parallel“ überhaupt bedeuten soll. Dieser Zusammenhang war Einstein 1905 natürlich noch nicht bekannt.

zur Zeit t_S des ungestrichenen Systems. Die x-Koordinate des Spiegels ist in diesem Moment $x_S + v(t_S - t_0)$. Die Geschwindigkeit c des Signals ist in beiden Koordinatensystemen nach Annahme **B'** gleich. Der Weg, den das Licht im ungestrichenen System von der Quelle bis zum Spiegel zurücklegen muss, ist größer als $x_S - x_0$, weil der Spiegel sich kontinuierlich entfernt. Größerer Weg und gleiche Geschwindigkeit ergibt längere Lichtlaufzeit. Die Zeit, die das Signal im ungestrichenen System für den Weg von der Quelle bis zum Spiegel benötigt, ist

$$\begin{aligned} t_S - t_0 &= \frac{x_S + v(t_S - t_0) - x_0}{c} \\ c(t_S - t_0) - v(t_S - t_0) &= x_S - x_0 \\ t_S - t_0 &= \frac{x_S - x_0}{c - v} \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

Daraus folgt

$$t_S \overset{(7)}{=} t_0 + \frac{x_S - x_0}{c - v} \tag{8a}$$

$$v(t_S - t_0) \overset{(7)}{=} v\,\frac{x_S - x_0}{c - v} \quad . \tag{8b}$$

Der Raumzeitpunkt, in dem das Signal den Spiegel erreicht, ist demnach in den beiden Koordinatensystemen:

$$\begin{aligned} (t'_S, x'_S, y'_0, z'_0) &= (t_S, x_S + v(t_S - t_0), y_0, z_0) = \\ &\overset{(8)}{=} \left(t_0 + \frac{x_S - x_0}{c - v}, x_S + v\frac{x_S - x_0}{c - v}, y_0, z_0\right) \end{aligned} \tag{9}$$

Bei (t'_A, x'_0, y'_0, z'_0) erreicht das reflektierte Signal einen im gestrichenen System ortsfesten Detektor, und wird registriert. Im ungestrichenen System hat das Lichtsignal vom Spiegel zum Detektor einen kürzeren Weg als $x_S - x_0$ zurückzulegen, weil ihm der Detektor mit der Geschwindigkeit v entgegen kommt. Folglich erhalten wir für den Rückweg des Lichts im Nenner $c+v$, wo wir beim Hinweg in (9) $c-v$ hatten. Folglich ist in den beiden Koordinatensystemen der Raumzeitpunkt, in dem das Signal den Detektor erreicht,

$$\begin{aligned}(t'_A, x'_0, y'_0, z'_0) &= (t_A, x_0 + v(t_A - t_0), y_0, z_0) = \\ &= \Bigg(t_0 + \frac{x_S - x_0}{c-v} + \frac{x_S - x_0}{c+v}, \\ &\qquad x_0 + v\left(\frac{x_S - x_0}{c-v} + \frac{x_S - x_0}{c+v}\right), y_0, z_0\Bigg) \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Im Folgenden wollen wir die Funktion $t'(t,x,y,z)$ finden. Wir kennen ihren Wert bereits für drei Raumzeit-Punkte:

$$t'_0 \overset{(6)}{=} t'(t_0, x_0, y_0, z_0) \tag{11a}$$

$$t'_S \overset{(9)}{=} t'\left(t_0 + \frac{x_S - x_0}{c-v}, x_S + v\frac{x_S - x_0}{c-v}, y_0, z_0\right) \tag{11b}$$

$$\begin{aligned} t'_A \overset{(10)}{=} t'\Bigg(&t_0 + \frac{x_S - x_0}{c-v} + \frac{x_S - x_0}{c+v}, \\ &x_0 + v\left(\frac{x_S - x_0}{c-v} + \frac{x_S - x_0}{c+v}\right), y_0, z_0\Bigg) \end{aligned} \tag{11c}$$

Es ist typisch für Einstein, dass er nicht versuchte unmittelbar die allgemeine Funktion $t'(t,x,y,z)$ anzugeben, sondern zunächst die Differentialquotienten $\frac{\partial t'}{\partial t}, \frac{\partial t'}{\partial x}, \frac{\partial t'}{\partial y}, \frac{\partial t'}{\partial z}$ ermittelte. Das tat er recht trickreich dadurch, dass er infinitesimal „am Spiegel wackelte“, d.h. die Ableitung $\frac{\partial t'}{\partial x_S}$ untersuchte:

$$\frac{\partial t'}{\partial x_S} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_S} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_S} + \frac{\partial t'}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_S} + \frac{\partial t'}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_S} \tag{12a}$$

$$\frac{\partial t'_0}{\partial x_S} \overset{(12a),(11a)}{=} 0 \tag{12b}$$

$$\frac{\partial t'_S}{\partial x_S} \overset{(12a),(11b)}{=} \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{1}{c-v} + \frac{\partial t'}{\partial x}\left(1+\frac{v}{c-v}\right) \tag{12c}$$

$$\frac{\partial t'_A}{\partial x_S} \overset{(12a),(11c)}{=} \frac{\partial t'}{\partial t}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right) + \frac{\partial t'}{\partial x}\left(\frac{v}{c-v}+\frac{v}{c+v}\right) \tag{12d}$$

Nun benutzte Einstein (12), um die Synchronisationsbedingung der Uhren im gestrichenen System nach x_S abzuleiten:

$$\frac{\partial t'_S}{\partial x_S} \overset{(4b)}{=} \frac{\partial}{\partial x_S}\left(\frac{1}{2}(t'_A + t'_0)\right)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{1}{c-v} + \frac{\partial t'}{\partial x}\left(1+\frac{v}{c-v}\right) \overset{(12c),(12d),(12b)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial t'}{\partial t}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial t'}{\partial x}\left(\frac{v}{c-v}+\frac{v}{c+v}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial t'}{\partial t}\left(\frac{1}{c-v}-\frac{1}{c+v}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial t'}{\partial x}\left(\frac{v}{c+v}-2-\frac{v}{c-v}\right)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\left(\frac{c+v-c+v}{c^2-v^2}\right) = \frac{\partial t'}{\partial x}\left(\frac{v(c-v)-2(c^2-v^2)-v(c+v)}{c^2-v^2}\right)$$

$$-\frac{v}{c^2}\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial x} \tag{13}$$

Damit sind die Differentialquotienten $\frac{\partial t'}{\partial t}$ und $\frac{\partial t'}{\partial x}$ gefunden, und bemerkenswerterweise hängen sie voneinander ab! Um auch noch $\frac{\partial t'}{\partial y}$ und $\frac{\partial t'}{\partial z}$ festzustellen, senden wir vom Raumzeitpunkt

$$(t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0) \tag{14}$$

ein Lichtsignal in Richtung der y'-Achse zu einem Spiegel, der ortsfest im gestrichenen System an der Stelle (t', x'_0, y'_S, z'_0) montiert ist. Im ungestrichenen System hat dieser Spiegel die zeitabhängigen Koordinaten $(t, x_0 + v(t - t_0), y_S, z_0)$. Wir nutzen Annahme **B'**, und setzen für die Geschwindigkeit des Signals in beiden Bezugssystemen den Wert c ein. Wieder ist zu beachten, dass die Laufzeit

$t_S - t_0$ des Signals von der Quelle bis zum Spiegel im ungestrichenen System größer ist als $(y_S - y_0)/c$, weil sich der Spiegel in x-Richtung bewegt während das Signal unterwegs ist. Das Signal muss also einen längeren „schrägen“ Weg zurücklegen, und seine Laufzeit von der Quelle bis zum Spiegel kann mit dem Satz von Pythagoras berechnet werden:

$$\begin{aligned} c^2(t_S - t_0)^2 &= (y_S - y_0)^2 + v^2(t_S - t_0)^2 \\ t_S - t_0 &= \frac{y_S - y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} \end{aligned} \tag{15}$$

Damit sind die Raumzeitkoordinaten des Signals in dem Moment, wo es beim Spiegel eintrifft:

$$\begin{aligned} &(t'_M, x'_0, y'_M, z'_0) = \\ &\qquad = (t_0 + \frac{y_M - y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}, x_0 + v(t_0 + \frac{y_M - y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}), y_M, z_0) \end{aligned} \tag{16}$$

Am Spiegel wird das Signal reflektiert, und dann von einem Detektor registriert, der im gestrichenen System ortsfest an der Stelle (t', x'_0, y'_0, z'_0) angebracht ist. Die Raumzeitkoordinaten des Signals in dem Moment, wo es beim Detektor eintrifft, sind

$$(t'_A, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0 + 2\frac{y_S - y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}, x_0 + v(t_0 + 2\frac{y_S - y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}}), y_0, z_0). \tag{17}$$

Wieder fand Einstein die gesuchten Differentialquotienten durch „Wackeln am Spiegel“, d.h. er untersuchte die Ableitungen von t' nach y_S:

$$\frac{\partial t'_0}{\partial y_S} = 0 \tag{18a}$$

$$\frac{\partial t'_S}{\partial y_S} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{\partial t'}{\partial y} \tag{18b}$$

$$\frac{\partial t'_A}{\partial y_S} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{2}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{2v}{\sqrt{c^2-v^2}} \tag{18c}$$

Mithilfe von (18) lässt sich die Synchronisationsbedingung (4b) nach y_S ableiten:

$$\frac{\partial}{\partial y_S}t'_S \overset{(4b)}{=} \frac{\partial}{\partial y_S}\left(\frac{1}{2}(t'_A + t'_0)\right)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{\partial t'}{\partial y} \overset{(18b),(18c),(18a)}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\frac{2}{\sqrt{c^2-v^2}} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{2v}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)$$

$$\frac{\partial t'}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

Auf die gleiche Weise findet man auch

$$\frac{\partial t'}{\partial z} = 0\ . \tag{20}$$

Wir kennen jetzt die Ableitungen von t' nach den ungestrichenen Koordinaten t, x, y, z . Durch Einsetzen prüft man nach, dass der Ansatz

$$t' - t'_0 = \gamma\left(t - t_0 - \frac{v(x-x_0)}{c^2}\right) \tag{21}$$

die Gleichungen (13), (19) und (20) erfüllt. γ ist dabei eine unbekannte Funktion, die nicht von t, x, y, z und auch nicht von x_S oder y_S abhängt, denn sonst wäre (21) keine Lösung von (13), (19) und (20). γ kann aber von v abhängen, und es wird sich herausstellen dass dies tatsächlich der Fall ist. Die Konstanten t'_0 , t_0 , und x_0 sind durch die Randbedingung $(t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0)$ festgelegt.

Mit (21) ist die Transformation der Zeitkoordinaten gefunden (wobei γ noch zu bestimmen ist). Um die Transformation der Raumkoordinaten zu konstruieren, nutzte Einstein nochmals Annahme

B', nach der die Geschwindigkeit c eines Lichtsignals im Vakuum in beiden Systemen gleich groß ist. Wir senden vom Raumzeitpunkt $(t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0)$ ein Lichtsignal in x-Richtung ($= x'$-Richtung). Die x'-Koordinate des Signals zur Zeit t' ist

$$x' = c(t' - t'_0) + x'_0 \ , \tag{22a}$$

die x-Koordinate des Signals zur Zeit t ist

$$x = c(t - t_0) + x_0 \ . \tag{22b}$$

Einsetzen von (22) in (21) ergibt

$$\begin{aligned} \frac{x' - x'_0}{c} &= \gamma\Big(\frac{x - x_0}{c} - \frac{vc(t - t_0)}{c^2}\Big) \\ x' - x'_0 &= \gamma\Big(x - x_0 - v(t - t_0)\Big) \ . \end{aligned} \tag{23}$$

Vom Raumzeitpunkt $(t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0)$ senden wir jetzt ein Lichtsignal in y'-Richtung. Die y'-Koordinate des Signals zur Zeit t' ist

$$y' = c(t' - t'_0) + y'_0 \ , \tag{24}$$

und seine x-Koordinate zur Zeit t ist

$$x = v(t - t_0) + x_0 \ . \tag{25a}$$

Weil das Signal mit der Geschwindigkeit c im ungestrichenen System einen „schiefen“ Weg läuft, erhält man mit dem Satz des Pythagoras für seine y-Koordinate

$$y - y_0 = \sqrt{c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2} \overset{(25a)}{=} (\sqrt{c^2 - v^2})(t - t_0) \ . \tag{25b}$$

Einsetzen von (24) und (25a) in (21) ergibt

$$\frac{y' - y'_0}{c} = \gamma\Big(t - t_0 - \frac{v^2(t - t_0)}{c^2}\Big) \ , \tag{26}$$

woraus durch Einsetzen von (25b)

$$\frac{y' - y'_0}{c} = \gamma\Big(\frac{y - y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{v^2(\frac{y - y_0}{\sqrt{c^2 - v^2}})}{c^2}\Big)$$

$$y' - y'_0 = \gamma\Big(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Big)(y - y_0) \tag{27}$$

folgt. Völlig analog findet man

$$z' - z'_0 = \gamma\Big(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Big)(z - z_0) \ . \tag{28}$$

Wir stellen die gefundenen vier Transformationsgleichungen hier nochmals übersichtlich zusammen:

$$t' - t'_0 \overset{(21)}{=} \gamma\left(t - t_0 - \frac{v(x - x_0)}{c^2}\right) \tag{29a}$$

$$x' - x'_0 \overset{(23)}{=} \gamma(x - x_0 - v(t - t_0)) \tag{29b}$$

$$y' - y'_0 \overset{(27)}{=} \gamma\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)(y - y_0) \tag{29c}$$

$$z' - z'_0 \overset{(28)}{=} \gamma\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)(z - z_0) \tag{29d}$$

mit $(t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0)$

mit γ: noch unbekannt, siehe (31)!

Die abschließende Aufgabe ist die Bestimmung von γ. Einstein löste sie dadurch, dass er mit (29) die gestrichenen Koordinaten in ein zweigestrichenes Koordinatensystem transformierte, das sich in x'-Richtung des gestrichenen Koordinatensystems mit der Geschwindigkeit v' bewegt. Seine x''-Achse ist parallel und richtungsgleich zur x'-Achse, seine y''-Achse ist parallel und richtungsgleich zur y'-Achse, seine z''-Achse ist parallel und richtungsgleich zur z'-Achse:

$$\begin{aligned}
t''-t''_0 &\overset{(29a)}{=} \gamma\left(t'-t'_0-\frac{v'(x'-x'_0)}{c^2}\right)\\
&\overset{(29b)}{=} \gamma^2\left(t-t_0-\frac{v(x-x_0)}{c^2}-\frac{v'(x-x_0-v(t-t_0))}{c^2}\right)\\
&= \gamma^2\left((t-t_0)\left(1-\frac{-v'v}{c^2}\right)-\frac{(v+v')(x-x_0)}{c^2}\right) && \text{(30a)}\\
x''-x''_0 &\overset{(29b)}{=} \gamma(x'-x'_0-v'(t'-t'_0))\\
&\overset{(29a)}{=} \gamma^2\left(x-x_0-v(t-t_0)-v'\left(t-t_0-\frac{v(x-x_0)}{c^2}\right)\right)\\
&= \gamma^2\left((x-x_0)\left(1-\frac{-v'v}{c^2}\right)-(v+v')(t-t_0)\right) && \text{(30b)}\\
y''-y''_0 &\overset{(29c)}{=} \gamma\left(\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\right)(y'-y'_0)\\
&\overset{(29c)}{=} \gamma^2\left(\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)(y-y_0) && \text{(30c)}\\
z''-z''_0 &\overset{(29d)}{=} \gamma\left(\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\right)(z'-z'_0)\\
&\overset{(29d)}{=} \gamma^2\left(\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)(z-z_0) && \text{(30d)}
\end{aligned}$$

$$\text{mit } (t''_0,x''_0,y''_0,z''_0)=(t'_0,x'_0,y'_0,z'_0)=(t_0,x_0,y_0,z_0)$$

Der Trick ist nun, $v' = -v$ zu wählen. Bei dieser Wahl müssen die zweigestrichenen Koordinaten gleich den ungestrichenen sein, denn das ist ja genau die Rücktransformation vom gestrichenen ins ungestrichene Koordinatensystem. Daraus folgt

$$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ , \tag{31}$$

und aus (29) ergeben sich die bekannten Lorentz-Transformationen:

$$t' - t'_0 = \frac{t - t_0 - v(x - x_0)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{32a}$$

$$x' - x'_0 = \frac{x - x_0 - v(t - t_0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{32b}$$

$$y' - y'_0 = y - y_0 \tag{32c}$$

$$z' - z'_0 = z - z_0 \tag{32d}$$

$$\text{mit } (t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0)$$

Jetzt wollen wir die Invariante der SRT herleiten. Dazu multiplizieren wir (32a) mit dem konstanten Faktor c, und quadrieren sie. (32b) quadrieren wir ebenfalls. Dann ziehen wir die zweite dieser beiden Gleichungen seitenweise von der ersten ab:

$$\begin{aligned} c^2(t' - t'_0)^2 - (x' - x'_0)^2 &= \\ &= \gamma^2\Big(t - t_0 - \frac{v}{c^2}(x - x_0)\Big)^2 - \gamma^2\Big(x - x_0 - v(t - t_0)\Big)^2 \\ &= c^2(t - t_0)^2 \underbrace{\gamma^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)}_{1} - (x - x_0)^2 \underbrace{\gamma^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)}_{1} \end{aligned} \tag{33a}$$

Außerdem gilt

$$(y' - y'_0)^2 \overset{(32c)}{=} (y - y_0)^2 \tag{33b}$$

$$(z' - z'_0)^2 \overset{(32d)}{=} (z - z_0)^2 \quad . \tag{33c}$$

Die Gleichungen (33) gelten wenn sich das gestrichene Koordinatensystem parallel zur x-Achse des ungestrichenen Koordinatensystems bewegt. Es ist plausibel, dass bei einer Relativbewegung der beiden Koordinatensysteme in beliebige Richtung die allgemeine Regel

$$\begin{aligned} c^2(t' - t'_0)^2 - (x' - x'_0)^2 - (y' - y'_0)^2 - (z' - z'_0)^2 &= \\ = c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 & \end{aligned} \tag{34}$$

gilt. Den Beweis ersparen wir uns. (34) ist die grundlegende Invariante der Speziellen Relativitätstheorie. Minkowski[7] schlug vor, (34) als invariantes Abstandsquadrat in einem als „Raum-Zeit" bezeichneten vierdimensionalen Raum zu betrachten. Während im dreidimensionalen Euklidischen Raum das Abstandsquadrat $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ der Punkte (x, y, z) und (x_0, y_0, z_0) invariant ist und in allen Koordinatensystemen den gleichen Wert hat, ist in der vierdimensionalen Raum-Zeit der Speziellen Relativitätstheorie das Abstandsquadrat $c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2$ der Punkte (ct, x, y, z) und (ct_0, x_0, y_0, z_0) invariant, und hat in allen Koordinatensystemen den gleichen Wert. Der Minkowski-Raum der Speziellen Relativitätstheorie ist kein Euklidischer Raum, weil die Quadrate in (34) nicht alle das gleiche Vorzeichen haben. Vielmehr wird durch (34) eine hyperbolische Metrik definiert.

Wir multiplizieren (32a) mit dem konstanten Faktor c, und fassen die Komponenten von (32) zu Vierervektoren zusammen. Dann können wir (32) in Matrixform schreiben:

[7] Hermann Minkowski (1864 - 1909)

$$\begin{pmatrix} ct' - ct'_0 \\ x' - x'_0 \\ y' - y'_0 \\ z' - z'_0 \end{pmatrix} = \Lambda_{x\text{-boost}} \begin{pmatrix} ct - ct_0 \\ x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

Die Transformation

$$\Lambda_{x\text{-boost}} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v/c}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36a}$$

wird als „Lorentzboost“ in x-Richtung bezeichnet. Allgemeine Lorentztransformationen können Boosts in beliebige Richtungen und/oder rein räumliche Drehungen darstellen. Ohne Herleitung geben wir die Lorentztransformationen für eine Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse

$$\Lambda_{z\text{-rot}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{36b}$$

und eine Drehung des Koordinatensystems um die x-Achse

$$\Lambda_{x\text{-rot}} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{36c}$$

an. Jede beliebige räumliche Drehung des Koordinatensystems lässt sich darstellen durch Hintereinanderschaltung einer Drehung um die z-Achse, dann einer Drehung um die neue x-Achse, und schließlich einer Drehung um die neue z-Achse. Einen Lorentzboost in beliebiger Richtung können wir dadurch darstellen, dass wir zunächst die x-Achse in die Boostrichtung drehen, dann den Boost mithilfe von (36a) durchführen, und schließlich die Achsenrichtungen wieder zurückdrehen. Jede beliebige Lorentztransformation kann also aus (mehrfacher) Hintereinanderschaltung der drei Transformationen (36) zusammengesetzt werden.

Die Lorentztransformationen folgen aus den beiden grundlegenden Annahmen **B'** und **C**. Man kann sagen: **B'** und **C** sind die physikalische Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie, während die Transformationen (36) sowie die aus diesen Transformationen folgende Invariante (34) ihre mathematische Formulierung bilden.

Das Relativitätsprinzip **A** ist keine Voraussetzung der SRT (Einstein hat sie an keiner Stelle der Herleitung der Lorentztransformationen benutzt), wohl aber eine korrekte Schlussfolgerung aus ihr.

3.2. Addition von Geschwindigkeiten

Ein gestrichenes Koordinatensystem bewege sich relativ zu einem ungestrichenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung. Ein zweigestrichenes Koordinatensystem bewege sich relativ zum gestrichenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit v' in x'-Richtung. x-Richtung und x'-Richtung seien identisch. Dann bewegt sich das zweigestrichene Koordinatensystem relativ zum ungestrichenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit v'' in x-Richtung. Die Newton'sche Mechanik nimmt an, dass $v'' = v' + v$ ist. Nach der Speziellen Relativitätstheorie werden Geschwindigkeiten aber anders addiert, $v'' \neq v' + v$. Wir untersuchen jetzt, wie Geschwindigkeiten relativistisch korrekt addiert werden.

Die Lorentztransformationen (32) werden für das zweigestrichene, das gestrichene, und das ungestrichene System:

$$\begin{aligned} t'' - t''_0 &= \frac{t' - t'_0 - v'(x' - x'_0)/c^2}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \\ &= \frac{t - t_0 - v(x - x_0)/c^2 - v'(x - x_0 - v(t - t_0))/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - v'^2/c^2}} \qquad (37a) \\ x'' - x''_0 &= \frac{x' - x'_0 - v'(t' - t'_0)}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} = \\ &= \frac{x - x_0 - v(t - t_0) - v'(t - t_0 - v(x - x_0)/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \sqrt{1 - v'^2/c^2}} \qquad (37b) \\ y'' - y''_0 &= y' - y'_0 = y - y_0 \qquad (37c) \\ z'' - z''_0 &= z' - z'_0 = z - z_0 \qquad (37d) \\ &\text{mit } (t''_0, x''_0, y''_0, z''_0) = (t'_0, x'_0, y'_0, z'_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

Alternativ können wir mit (32) auch direkt die Lorentztransformation der Raumzeitkoordinaten vom ungestrichenen zum zweigestrichenen System angeben:

$$\begin{aligned} t'' - t''_0 &= \frac{t - t_0 - v''(x - x_0)/c^2}{\sqrt{1 - v''^2/c^2}} \qquad (38a) \\ x'' - x''_0 &= \frac{x - x_0 - v''(t - t_0)}{\sqrt{1 - v''^2/c^2}} \qquad (38b) \\ y'' - y''_0 &= y - y_0 \qquad (38c) \\ z'' - z''_0 &= z - z_0 \qquad (38d) \\ &\text{mit } (t''_0, x''_0, y''_0, z''_0) = (t_0, x_0, y_0, z_0) \end{aligned}$$

Wir teilen (37a) seitenweise durch (37b):

$$\frac{t''-t''_0}{x''-x''_0}=\frac{t-t_0-v(x-x_0)/c^2-v'(x-x_0-v(t-t_0))/c^2}{x-x_0-v(t-t_0)-v'(t-t_0-v(x-x_0)/c^2)}=$$
$$=\frac{(t-t_0)(c^2+v'v)/c^2-(v+v')(x-x_0)/c^2}{(x-x_0)(c^2+v'v)/c^2-(v+v')(t-t_0)}=$$
$$=\frac{t-t_0-(x-x_0)(v+v')/(c^2+v'v)}{x-x_0-(t-t_0)c^2(v+v')/(c^2+v'v)} \qquad (39)$$

Wir teilen (38a) seitenweise durch (38b):

$$\frac{t''-t''_0}{x''-x''_0}=\frac{t-t_0-(x-x_0)v''/c^2}{x-x_0-(t-t_0)v''} \qquad (40)$$

Der Vergleich von (40) und (39) ergibt sofort

$$v''=\frac{v+v'}{1+v'v/c^2}\ . \qquad (41)$$

Für kleine Geschwindigkeiten $(vv'/c)^2 \ll 1$ geht (41) in den Newton'schen Wert $v'' \approx v'+v$ über. Interessanter ist die Addition großer Geschwindigkeiten. Für $v=v'=0.9c$ finden wir

$$v''=\frac{0.9c+0.9c}{1+0.81}\approx 0.9945c \neq 1.8c\ . \qquad (42)$$

Egal wie nahe die Geschwindigkeiten v und v' der Geschwindigkeit c von Licht im Vakuum kommen, ihre relativistische Summe bleibt immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c.

3.3. Zeitdilatation, Längenkontraktion

Das gestrichene Koordinatensystem bewegt sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung des ungestrichenen Koordinatensystems. Eine im gestrichenen System am Ort x'_A, y'_A, z'_A ruhende Uhr hat zum Zeitpunkt t'_A die Raumzeitkoordinaten (t'_A, x'_A, y'_A, z'_A), zum

Zeitpunkt t'_B die Raumzeitkoordinaten (t'_B, x'_A, y'_A, z'_A) . An beiden Raumzeitpunkten befinden sich auch Uhren die im ungestrichenen System ruhen, insgesamt arbeiten wir also mit drei Uhren. Die beiden ungestrichenen Uhren sind gemäß Abschnitt 2.4 synchronisiert, und haben in den Momenten wo sie jeweils mit der gestrichenen Uhr zusammentreffen die Koordinaten (t_A, x_A, y_A, z_A) beziehungsweise (t_B, x_B, y_B, z_B). Die zwischen den beiden Zeitpunkten verstrichene Zeit ist nach (32a)

$$\begin{aligned} t'_B - t'_A &= \frac{t_B - t_A - v(x_B - x_A)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{t_B - t_A - v(x_A + v(t_B - t_A) - x_A)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= (t_B - t_A)\sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \leq (t_B - t_A) \ , \end{aligned} \tag{43}$$

„woraus folgt, dass die Angabe der [bewegten] Uhr (im ruhenden System betrachtet) pro Sekunde um $(1 - \sqrt{1 - (v/V)^2})$ Sek. [...] zurückbleibt.“ schreibt Einstein [1].

Die Verlangsamung bewegter Uhren wird als Zeitdilatation bezeichnet. Da die Lichtgeschwindigkeit c als Quotient von Wegstrecke und Zeitintervall in jedem Bezugssystem gleich ist, muss es einen der Uhrenverlangsamung entsprechenden Effekt der Raumschrumpfung geben. Er wird Längenkontraktion genannt:

Wir betrachten einen Stab, der im gestrichenen Koordinatensystem ruht, und die Länge L' hat. Sein eines Ende hat zu beliebigen Zeiten t' die Koordinaten (t', x'_A, y'_A, z'_A), das andere die Koordinaten (t', x'_B, y'_B, z'_B). Um die Länge L des Stabes im ungestrichenen Koordinatensystem (in dem der Stab sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt) zu messen, müssen wir die Position seiner beiden Enden gleichzeitig, etwa zur Zeit t_m, messen. In diesem Zeitpunkt haben die Stabenden die Koordinaten (t_m, x_A, y_A, z_A)

und (t_m, x_B, y_B, z_B). Die Komponenten von L' bzw. L können wir mit (32) sofort angeben:

$$L'_x = x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A - v(t_m - t_m)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$L_x = L'_x \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \leq L'_x \tag{44a}$$

$$L_y = y_B - y_A = y'_B - y'_A = L'_y \tag{44b}$$

$$L_z = z_B - z_A = z'_B - z'_A = L'_z \tag{44c}$$

Im Fall $v \neq 0$ und $L_x > 0$ ist also $L' > L$. L' ist die Länge des Stabes gemessen in dem Koordinatensystem in dem der Stab ruht, L ist die Länge des Stabes gemessen in dem Koordinatensystem in dem der Stab bewegt ist. Die Länge des bewegten Stabes ist kleiner als die Länge des ruhenden Stabes, obwohl es sich selbstverständlich jederzeit um den identischen Stab handelt! Wie ist das möglich? Ein Kollege, der sich mit dem gestrichenen System bewegt, sich also relativ zum Stab in Ruhe befindet, gibt uns den entscheidenden Hinweis: „Ihr habt die Position der beiden Stabenden zu verschiedenen Zeitpunkten gemessen.“ Betrachten wir also mithilfe von Gleichung (32a) nochmals den Zeitpunkt t_m unserer Messung:

$$t'_{mA} - t'_0 = \frac{t_m - t_0 - v(x_A - x_0)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t'_{mB} - t'_0 = \frac{t_m - t_0 - v(x_B - x_0)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$t'_{mA} - t'_{mB} = \frac{-v(x_A - x_B)/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \begin{cases} < 0 \text{ falls } x_A > x_B \\ > 0 \text{ falls } x_A < x_B \end{cases} \tag{45}$$

Tatsächlich, nach der Zeitangabe einer Uhr, die im gestrichenen System ruht, haben wir die Position des vorderen Stabendes zu früh und/oder die Position des hinteren Stabendes zu spät gemessen. Der Unterschied im Messergebnis ist demnach auf die Definition der Gleichzeitigkeit im Abschnitt 2.4 zurückzuführen. Und die folgte aus dem dort beschriebenen Synchronisationsverfahren, welches wiederum auf Annahme **B'**, dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit beruht. Es ist also letztlich dieses Prinzip, das dazu führt dass Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig sind, in einem dazu bewegten Bezugssystem nicht gleichzeitig sind.

„Ein starrer Körper, welcher in ruhendem Zustande ausgemessen die Gestalt einer Kugel [mit dem Radius R] hat, hat also in bewegtem Zustande – vom ruhenden System aus betrachtet – die Gestalt eines Rotationsellipsoides mit den Achsen

$$R\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}, R, R\ .$$

Während also die Y- und Z-Dimension der Kugel (also auch jedes starren Körpers von beliebiger Gestalt) durch die Bewegung nicht modifiziert erscheinen, erscheint die X-Dimension im Verhältnis $1 : \sqrt{1-v^2/V^2}$ verkürzt, also um so stärker, je grösser v ist. Für $v = V$ schrumpfen alle bewegten Objekte – vom „ruhenden“ System aus betrachtet – in flächenhafte Gebilde zusammen.“ schreibt Einstein [1], wobei er mit V die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum meint, wofür wir den Buchstaben c verwendet haben.

Zu warnen ist vor dem missverständlichen Wort „erscheinen“, das den Eindruck erwecken könnte es handele sich um eine Art korrigierbaren Parallaxenfehler oder eine optische Täuschung. Bewegte Objekte sind aber wirklich und tatsächlich, in jedem physikalisch vernünftigen Sinn gegenüber den gleichen Objekten, wenn sie in Ruhe sind, verkürzt. Es ist so ähnlich wie die Frage, ob die Neuseeländer richtig herum stehen und die Europäer auf dem Kopf, oder umgekehrt. Begriffe wie „oben“ und „unten“ haben keine universell gültige Bedeutung, sondern können nur relativ zu einem lokal definierten Bezugssystem sinnvoll verwendet werden. Die Relativitätstheorie heißt Relativitätstheorie, weil sie klarstellt dass viele Begriffe wie beispielsweise „Länge“ eines Stabes, die früher universelle Gültigkeit zu haben schienen, tatsächlich nur relativ zu einem bestimmten Bezugssystem eindeutig definiert werden können. Die gemessene Länge L ist relativ zum ungestrichenen Koordinatensystem genauso wahr und richtig wie die Länge L' relativ zum gestrichenen Koordinatensystem.

3.4. Raum-Zeit-Diagramme

Die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Koordinatensystemen lassen sich mithilfe von Raum-Zeit-Diagrammen anschaulich darstellen. Wir betrachten als Beispiel ein gestrichenes und ein ungestrichenes Koordinatensystem. Die Achsen der beiden Systeme seien in die gleichen Richtungen orientiert, und der Nullpunkt des gestrichenen Koordinatensystems bewege sich gegenüber dem ungestrichenen Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit v in Richtung der ungestrichenen x-Achse , siehe Abbildung 1 auf der nächsten Seite. (Diese Grafik wurde mit $v = c/2$ konstruiert.)

Das ungestrichene Koordinatensystem ist mit rechtwinkligen Achsen dargestellt. Die Einheiten der x-Achse und der ct-Achse wurden so gewählt, dass die grün skizzierte Weltlinie eines zur Zeit $t = 0$ den Ort $x = 0$ in x-Richtung passierenden Lichtsignals mit jeder der beiden blauen Achsen einen Winkel von 45° einschließt. Die horizontalen blauen Linien sind Linien gleicher Zeit im ungestrichenen System, die senkrechten blauen Linien sind Linien gleichen Ortes in diesem System.

Für den Winkel zwischen der ct-Achse und der ct'-Achse gilt

$$\tan(ct, ct') = \frac{x}{ct} = \frac{v}{c} \ . \tag{46a}$$

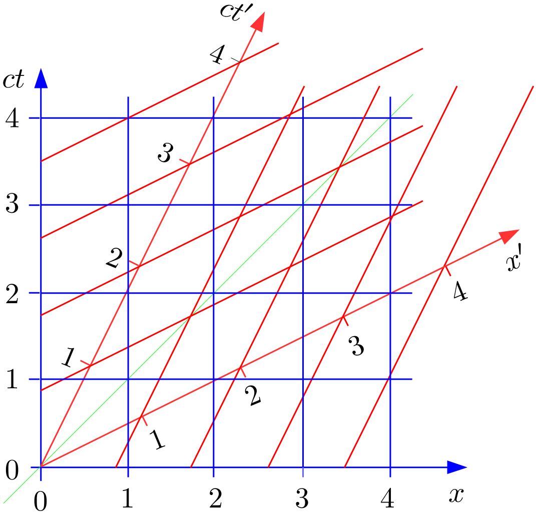

Abb. 1: Ein Raum-Zeit-Diagramm

Durch diese Bedingung wird die Richtung (aber nicht die Skala) der ct'-Achse festgelegt.

Die parallel zur ct'-Achse verlaufenden steilen roten Linien sind Linien gleichen Ortes im gestrichenen Koordinatensystem. Nach Newtons Mechanik wären die waagerechten blauen Linien auch im gestrichenen System die Linien gleicher Zeit, d. h. die x'-Achse wäre im Diagramm parallel zur x-Achse. Zufolge der Speziellen Relativitätstheorie müssen wir die Richtung der x'-Achse jedoch mithilfe der Lorentztransformationen bestimmen. Diese Achse besteht aus den Punkten $(t' = 0, x')$. Auf ihr gilt mit $t_0 = 0$ und $x_0 = 0$

$$t' = 0 \overset{(32a)}{=} \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{ct}{x} = \frac{v}{c} = \tan(x, x') \stackrel{(46a)}{=} \tan(ct, ct') \ . \tag{46b}$$

Also wird die x'-Achse gegenüber der x-Achse um den gleichen Winkel hin zur Weltlinie des Lichtpulses gedreht wie die ct'-Achse gegenüber der ct-Achse. Das ist immer so: Wenn die Skalen an den Achsen eines Raum-Zeit-Diagramms so gewählt werden, dass die Weltlinie von Lichtpulsen mit der Zeitachse und der Raumachse den gleichen Winkel einschließt, dann gilt dasgleiche auch für jedes andere System, dessen Nullpunkt sich mit konstanter (positiver oder negativer) Geschwindigkeit relativ zum ersten System bewegt.

Die schwach ansteigenden roten Linien, die parallel zur x'-Achse sind, sind die Linien gleicher Zeit im gestrichenen Koordinatensystem. Sie kreuzen die waagerechten blauen Linien gleicher Zeit des ungestrichenen Koordinatensystems. Ereignisse, die im einen System gleichzeitig sind, sind es also im anderen System nicht.

Mit (46) sind die Richtungen der ct'-Achse und der x'-Achse festgelegt, aber noch nicht ihre Skalen. Wir betrachten zuerst die x'-Achse. Nach (44a) ist die x-Komponente L'_x der Länge eines Objekts, das im gestrichenen System ruht, im ungestrichenen System auf die Länge L_x kontrahiert:

$$L_x \stackrel{(44a)}{=} L'_x \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad \leq L'_x \tag{47}$$

Wir verwenden die gleichen Einheiten – z. B. Meter – auf den x-Achsen beider Systeme. Ein Objekt mit Länge $L'_x = 1\,\mathrm{m}$, das im gestrichenen System ruht, ist im ungestrichenen System nur $\sqrt{1 - v^2/c^2}\,\mathrm{m}$ lang. Folglich schneidet eine zur ct'-Achse parallele Gerade, die die x-Achse an dem Punkt schneidet der $\sqrt{1 - v^2/c^2}\,\mathrm{m}$ repräsentiert, die x'-Achse an dem Punkt der $1\,\mathrm{m}$ repräsentiert.

Die Graphik Abb. 1 auf Seite 34 wurde mit $v = c/2$ konstruiert. Deshalb schneidet die steile rote Line, die die x-Achse bei $\sqrt{1 - c^2/(4c^2)} = 0.866$ schneidet, die x'-Achse bei 1 .

Weil die ct'-Achse und die x'-Achse den gleichen Winkel mit der grünen Weltlinie des Lichtsignals einschließen (siehe Abb. 1), muss die Länge der Skalenteile auf beiden Achsen identisch sein. Also haben wir die Länge der Skalenteile auf beiden gestrichenen Achsen gefunden.

Man beachte die perfekte Symmetrie: Die steile rote Linie durch den Skalenteil n auf der x'-Achse in Abb. 1 schneidet die x-Achse links vom Skalenteil n auf dieser Achse. Und die vertikale blaue Linie durch den Skalenteil n auf der x-Achse schneidet die x'-Achse links vom Skalenteil n auf dieser Achse: Objekte, die im gestrichenen System ruhen, sind im ungestrichenen System um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kontrahiert. Und Objekte, die im ungestrichenen System ruhen, sind im gestrichenen System um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ kontrahiert.

Die flache rote Linie durch den Skalenteil n auf der ct'-Achse schneidet die ct-Achse unter dem Skalenteil n auf dieser Achse. Und die horizontale blaue Linie durch den Skalenteil n auf der ct-Achse schneidet die ct'-Achse unter dem Skalenteil n auf dieser Achse: Uhren, die im gestrichenen System ruhen, sind im ungestrichenen System um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ langsamer. Und Uhren, die im ungestrichenen System ruhen, sind im gestrichenen System um den Faktor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ langsamer.

3.5. Ein Zug rast durch einen Tunnel

Die unanschaulichen Vorgänge der Längenkontraktion und Zeitdilatation haben die Erfindung zahlreicher Paradoxa angeregt. Das sind Szenarien, in denen die Spezielle Relativitätstheorie sich selbst zu widersprechen scheint. Bis heute wurde allerdings noch kein Paradoxon gefunden, das sich nicht bei sorgfältiger Analyse der Zusammenhänge als Scheinproblem herausstellte. Zum Abschluss dieses Artikels wollen wir zwei der bekanntesten Paradoxa besprechen.

Das erste Paradoxon behandelt die Fahrt eines Eisenbahnzuges, der mit halber Lichtgeschwindigkeit durch einen Tunnel rast. Der Tunnel hat die Besonderheit, dass er auf beiden Seiten mit Toren verschlossen werden kann, und dass immer nur eines der beiden Tore gleichzeitig geöffnet sein kann. Der Tunnel sei genau 100 m lang, der Zug (gemessen im Koordinatensystem, in dem er ruht) ebenfalls. Betrachtet im Ruhesystem des Tunnels, das wir im Folgenden als das ungestrichene System bezeichnen werden, sieht die Sache unproblematisch aus: Aufgrund seiner hohen Geschwindigkeit von $v = c/2$ hat der Zug in diesem System nur die

$$\text{Länge}_{\text{Zug}} \overset{(44a)}{=} 100\,\text{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 86.6\,\text{m}\ . \tag{48}$$

Man kann also, bei geöffnetem Eingangstor und geschlossenem Ausgangstor den Zug vollständig in den Tunnel einfahren lassen, dann das Eingangstor schließen und das Ausgangstor öffnen, bevor die Zugspitze am Ausgangstor ankommt. Wenn man die Sache dagegen aus dem gestrichenen Ruhesystem des Zuges betrachtet, scheinen die Chancen auf eine unfallfreie Durchfahrt drastisch zu sinken: Im gestrichenen System rast der Tunnel mit halber Lichtgeschwindigkeit auf den ruhenden Zug zu. Der Tunnel ist deshalb nur 86.6 m lang, der Zug dagegen 100 m . Also werden bei der Durchfahrt die Zugspitze und das Zugende gleichzeitig aus dem Tunnel herausragen, so dass in diesem Moment unmöglich eines der Tore geschlossen sein kann.

Die Kollision des Zuges mit einem der Tore ist ein objektives Faktum. Ob dieses Faktum eintritt oder nicht, kann nicht davon abhängen welches Koordinatensystem man zur Beschreibung des Vorgangs verwendet. Mithilfe des auf der nächsten Seite abgebildeten Raum-Zeit-Diagramms kann man sich leicht klarmachen, dass tatsächlich eine unfallfreie Durchfahrt des Zuges möglich ist.

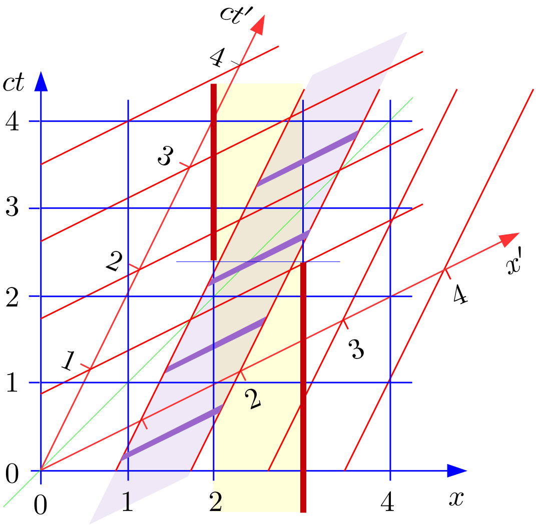

Abb. 2: Zug und Tunnel

Das ungestrichene blaue Koordinatensystem ist das Ruhesystem des Tunnels, das gestrichene rote Koordinatensystem ist das Ruhesystem des Zuges. In beiden Systemen ist eine x-Einheit bzw. eine x'-Einheit gleich 100 m. Der blass-gelb markierte Tunnel erstreckt sich von $x = 2$ bis $x = 3$. Das geschlossene Ausgangstor ist als dicke braune Linie bei $x = 3$ markiert. Zur Zeit $ct \approx 2.4$, die durch einen waagerechten blauen Strich markiert ist, wird das Eingangstor des Tunnels geschlossen (dicke braune Linie bei $x = 2$), und das Ausgangstor des Tunnels geöffnet.

Die Spitze des Zuges befindet sich in seinem Ruhesystem bei $x' = 2$, sein Ende bei $x' = 1$. Der Bereich, den der Zug einnimmt, ist durch blass-blaue Einfärbung markiert. Für vier bestimmte Zeitpunkte ist die Position des Zuges durch violette Balken dargestellt. Zur Zeit $ct' \approx 1.3$ ragt der Zug tatsächlich gleichzeitig auf beiden Seiten aus dem Tunnel heraus. Aber „gleichzeitig“ nur im gestrichenen Koordinatensystem! Gemessen mit Uhren, die im ungestrichenen System ruhen, ragt der Zug nur deutlich vor $ct \approx 2.4$ aus dem Eingang des Tunnels heraus, und nur deutlich nach $ct \approx 2.4$ aus dem Ausgang des Tunnels. Die Katastrophe kann vermieden werden, weil der Begriff „gleichzeitig“ in beiden Koordinatensystemen etwas Unterschiedliches bedeutet.

3.6. Das Zwillingsparadox

Die Zwillinge Andi und Willi wollen es genau wissen. Sie beschließen die Zeitdilatation praktisch zu überprüfen. An ihrem zwanzigsten Geburtstag besteigt jeder von ihnen ein Raumschiff und beschleunigt innerhalb von 3 Monaten (gemessen mit der Borduhr) auf $0.98c$ (gemessen in einem erdgebundenen Koordinatensystem) in Richtung Galaktisches Zentrum. Dann stellt Willi das Triebwerk ab und gleitet unbeschleunigt mit $0.98c$ weiter, während Andi innerhalb von 6 Monaten (gemessen mit seiner Borduhr) auf $0.98c$ (gemessen in einem erdgebundenen Koordinatensystem) in Richtung Erde beschleunigt. Dann beschleunigt Andi innerhalb von 3 Monaten (gemessen mit seiner Borduhr) auf etwa Null (gemessen in einem erdgebundenen Koordinatensystem), und landet nach einem Jahr (gemessen mit seiner Borduhr) gesamter Flugdauer, an seinem 21. Geburtstag, sanft auf der Erde.

Willi lässt sich 5 Jahre (gemessen mit seiner Borduhr) Zeit und fliegt weiter mit $0.98c$ (gemessen in einem erdgebundenen Koordinatensystem), bevor er innerhalb von 6 Monaten (gemessen mit seiner Borduhr) auf $0.98c$ (gemessen in einem erdgebundenen Koordinatensystem) in Richtung Erde beschleunigt. Anschließend fliegt er 5 Jahre (gemessen mit seiner Borduhr) unbeschleunigt mit $0.98c$ (gemessen in einem erdgebundenen Koordinatensystem) in Richtung Erde, beschleunigt dann innerhalb von 3 Monaten (gemessen mit seiner Borduhr) auf etwa Null (gemessen in einem erdgebundenen Koordinatensystem), und landet nach 11 Jahren (gemessen mit seiner Borduhr) gesamter Flugdauer sanft auf der Erde. Es ist sein 31. Geburtstag! Auf das Wiedersehen mit Andi hat er sich schon lange gefreut.

Da Willi sich mit seinem Raumschiff jahrelang sehr schnell – genauer gesagt mit $0.98c$ – relativ zur Erde und zu Andi bewegt hat, muss Andi inzwischen ziemlich alt geworden sein. Denn Willi's schnell bewegte Borduhr ging ja laut Formel (43) für die Zeitdilatation wesentlich langsamer als die ruhenden Uhren auf der Erde, und dementsprechend sollten Willi's Lebensvorgänge und Alterung, die ja auch eine Art Uhr sind, wesentlich langsamer vorangeschritten sein als die des auf der Erde in Ruhe lebenden Andi.

Man kann es allerdings auch umgekehrt sehen: In einem Bezugssystem, in dem Willi's Raumschiff ruht, hat sich die Erde mitsamt Andi 5 Jahre lang mit $0.98c$ entfernt, und hat sich später 5 Jahre lang mit $0.98c$ auf Willi's Raumschiff zubewegt. Da Andi sich 2×5 Jahre lang relativ zu Willi sehr schnell bewegt hat, sollte er bei Willi's Rückkehr zur Erde also wesentlich jünger sein als Willi selbst.

Wir können die Erde in guter Näherung als Inertialsystem betrachten. Auch Willi's Raumschiff ist, solange es nicht durch seine Triebwerke beschleunigt wird, ein Inertialsystem. Die SRT kennt kein bevorzugtes Inertialsystem, alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt. Also scheinen beide Sichtweisen, diejenige nach der Andi bei Willi's Rückkehr jünger sein sollte, und diejenige nach der Willi bei seiner Rückkehr jünger sein sollte als Andi, gleichberechtigt zu sein. Ein widersinniges Ergebnis. Deshalb ist das Experiment, das Andi und Willi durchführen, als „Zwillingsparadox“ bekannt.

Keine Auskunft gibt uns die Spezielle Relativitätstheorie über die Wirkung der insgesamt (laut Borduhr) einjährigen Beschleunigungsphasen, denn in diesem Zeitraum sind die Raumschiffe Beschleunigte Bezugssysteme, keine Inertialsysteme. Die SRT beschäftigt sich jedoch ausschließlich mit Inertialsystemen.[8] Aber gerade deshalb hat ja auch Andi seinen kurzen Raumflug durchgeführt. Jeder der beiden Zwillinge hat exakt die gleichen Beschleunigungsvorgänge erlebt, und damit 1 Jahr seines Lebens verbracht. Für die netto-Altersdifferenz zwischen den Zwillingen kann diese Zeit also keine Rolle spielen. Wenn es bei Willi's Rückkehr einen Altersunterschied zwischen den Brüdern gibt, dann kann der nur auf die beschleunigungsfreien Phasen zurückgeführt werden. Und deren Wirkung lässt sich mithilfe der SRT berechnen.

Berechnen wir also mit (43) das erwartete Ergebnis, wenn wir die Erde als ruhend, und Willi's Raumschiff als bewegt betrachten:

$$\begin{aligned} \mathrm{Zeit}_{\mathrm{Raumschiff}} &= \mathrm{Zeit}_{\mathrm{Erde}} \cdot \sqrt{1-(0.98c)^2/c^2} \\ 10\,\mathrm{Jahre}_{\mathrm{Raumschiff}} &\approx \mathrm{Zeit}_{\mathrm{Erde}} \cdot 0.2 \\ &\approx 50\,\mathrm{Jahre}_{\mathrm{Erde}} \cdot 0.2 \end{aligned} \tag{49}$$

Andi sollte nach dieser Rechnung also um 50 Jahre gealtert sein, während Willi um 10 Jahre alterte. Am Tag von Willi's Rückkehr, seinem 31. Geburtstag, wäre Andi demnach etwa 71 Jahre alt.

Wie sieht die Rechnung aus, wenn wir Willi's Raumschiff als ruhendes Koordinatensystem betrachten?

$$\begin{aligned} \mathrm{Zeit}_{\mathrm{Erde}} &= \mathrm{Zeit}_{\mathrm{Raumschiff}} \cdot \sqrt{1-(0.98c)^2/c^2} \\ &\approx (2 \cdot 5\,\mathrm{Jahre}) \cdot 0.2 \\ &\approx 2\,\mathrm{Jahre} \end{aligned} \tag{50}$$

Nach dieser Rechnung wäre Andi nur um 2 Jahre gealtert, während Willi um 10 Jahre alterte. Am Tag von Willi's Rückkehr, seinem 31. Geburtstag, wäre Andi demnach etwa 23 Jahre alt.

[8] Nachtrag in 2019: Das stimmt nicht genau. Auch die Beschleunigungsphasen beim Zwillingsparadox *können* im Rahmen der SRT diskutiert werden, siehe den „Nachtrag im Juli 2019“ am Ende dieses Abschnitts.

71 oder 23 Jahre? Willi ist aufs Äußerste gespannt, als er aus der Luke seines Raumschiffs krabbelt. Ein rüstiger Rentner tritt auf ihn zu, und umarmt ihn herzlich. Es ist der 71-jährige Andi.

Andi freut sich, dass er seinem jung gebliebenen Zwillingsbruder den Ausgang des Experiments erklären kann. Er hat nämlich inzwischen bei einem Antiquar eine längst vergilbte, uralte Ausgabe der „Mitteilungen des Astrophysikalischen Instituts Neunhof“ aus dem Jahr 2010 aufgestöbert, in der die Zusammenhänge erläutert werden [7]:

Der ganze Vorgang erscheint deswegen paradox, weil perfekte Symmetrie vorzuliegen scheint. Zunächst entfernt sich das Raumschiff mit $0.98c$ von der Erde. Oder die Erde entfernt sich mit $0.98c$ vom Raumschiff. Dann bewegt sich die Erde mit $0.98c$ auf das Raumschiff zu. Oder das Raumschiff fliegt mit $0.98c$ auf die Erde zu. Erst beim zweiten Hinschauen bemerkt man die Asymmetrie: Tatsächlich benutzen wir insgesamt 3 Inertialsysteme, nicht 2 .

Wir nennen das Inertialsystem, in dem Willi's Raumschiff während des ersten Teils seiner Reise ruht S_{R1} , dasjenige in dem das Raumschiff während des zweiten Teils der Reise ruht S_{R2} . Das Inertialsystem, in dem die Erde mitsamt Andi ruht nennen wir S_E . Als wir die Erde als ruhend betrachteten, haben wir das gesamte Experiment im System S_E berechnet, und das korrekte Ergebnis erhalten. Als wir Willi's Raumschiff als ruhend betrachteten, haben wir zunächst S_{R1} benutzt, und dann einen fliegenden Wechsel auf S_{R2} gemacht. So ein freihändiger Wechsel zwischen Bezugssystemen ist mit Tücken und Fallstricken verbunden.

Wir werden besser verstehen, welcher Fehler uns beim Wechsel des Bezugssystems passiert ist, wenn wir einmal das gesamte Experiment von Anfang bis Ende konsistent im Inertialsystem S_{R1} betrachten. Beim ersten Teil seiner Reise ruht Willi 5 Jahre lang in diesem System, und wird dabei 5 Jahre älter. Andi altert währenddessen um

$$\begin{aligned}\text{Zeit}_{\text{Erde}} &= 5\,\text{Jahre}\,\sqrt{1-(0.98c)^2/c^2}\\ &\approx 5\,\text{Jahre}\cdot 0.2 \approx 1\,\text{Jahr}\ .\end{aligned} \tag{51}$$

Dann lenkt Willi sein Raumschiff um, und fliegt anschließend mit $0.98c$ (gemessen in S_E) auf die Erde zu. Die Erde bewegt sich (gemessen in S_{R1}) mit $0.98c$ in dergleichen Richtung wie das Raumschiff. Die Geschwindigkeit (gemessen in S_{R1}) des Raumschiffs ist natürlich *nicht* $1.96c$. Wir müssen die Geschwindigkeiten relativistisch korrekt addieren. Nach (41) hat Willi's Raumschiff im Koordinatensystem S_{R1} die Geschwindigkeit

$$v = \frac{0.98c + 0.98c}{1+0.98^2} \approx 0.99980c\ . \tag{52}$$

Diese Flugphase dauert laut Willi's Borduhr 5 Jahre, in denen er um 5 Jahre altert. Wir berechnen die Zeit, die währenddessen im System S_{R1} verstreicht:

$$\begin{aligned}5\,\text{Jahre} &= \text{Zeit}_{S_{R1}}\sqrt{1-(0.99980c)^2/c^2}\\ &\approx \text{Zeit}_{S_{R1}}\cdot 0.0202\\ &\approx 247\,\text{Jahre}\cdot 0.0202\end{aligned} \tag{53}$$

Währenddessen altert Andi auf der Erde um

$$\begin{aligned}\text{Zeit}_{\text{Erde}} &= 247\,\text{Jahre}\,\sqrt{1-(0.98c)^2/c^2}\\ &\approx 247\,\text{Jahre}\cdot 0.2\\ &\approx 49\,\text{Jahre}\ .\end{aligned} \tag{54}$$

Insgesamt altert Andi also etwa um 50 Jahre, während Willi um 10 Jahre altert. An Willi's 31. Geburtstag ist Andi ungefähr 71 Jahre alt.

Wieder haben wir das korrekte Ergebnis erhalten. Und wir können jetzt klar sehen, was bei der falschen Berechnung (50) schief gelaufen ist. Laut Borduhr verbrachte Willi 5 Jahre mit dem beschleunigungsfreien Hinflug, und 5 Jahre mit dem beschleunigungsfreien Rückflug. Im Koordinatensystem S_{R1} dauerte der Hinflug 5 Jahre, der Rückflug 247 Jahre. Also verbrachte Willi laut der Uhren, die im S_{R1} ruhen, etwa 2% der gesamten Reisedauer mit dem Hinflug, und etwa 98% mit dem Rückflug. Aus Symmetriegründen wissen wir – auch ohne das wir es explizit berechnen müssen – dass er laut der Uhren, die im S_{R2} ruhen, etwa 98% der gesamten Reisedauer mit dem Hinflug, und etwa 2% mit dem Rückflug verbrachte. Als wir bei unserer falschen Berechnung seinen Hinflug im S_{R1} beschrieben, haben wir also die ersten 2% der gesamten Reise gesehen, und Andi's Alterung während dieser Zeit berechnet. Dann wechselten wir ins S_{R2} und beschrieben den Rückflug, also in diesem System die letzten 2% der Reise, und berechneten Andi's Alterung während dieser Zeit. 96% der Reisedauer, und Andi's Alterung in diesem Zeitraum, sind uns bei dem unvorsichtigen Systemwechsel durch die Lappen gegangen. Wenn wir das falsche Ergebnis (50) von 2 Jahren mit dem Korrekturfaktor $(1 - 96\%)^{-1}$ multiplizieren, erhalten wir wieder den richtigen Wert von 50 Jahren.

Nachtrag im Juli 2019

Auf Seite 41 habe ich geschrieben: „Keine Auskunft gibt uns die Spezielle Relativitätstheorie über die Wirkung der [. . .] Beschleunigungsphasen, denn [. . . d]ie SRT beschäftigt sich [. . .] ausschließlich mit Inertialsystemen.“ Das ist nicht genau richtig.

In einem 2019 publizierten Artikel [8] erinnerten Pepino und Mabile ihre Leser (einschließlich mich) daran, dass die Beschleunigungsphasen mit folgender Methode behandelt werden können, die sich ausschließlich auf den Formalismus der SRT stützt:

Wenn Willi sich mit seinem Raumschiff mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zur Erde bewegt, dann steht das mit Willi's Borduhr gemessene Zeitintervall $t_{\mathrm{B,Willi}} - t_{\mathrm{A,Willi}}$ zwischen zwei

Ereignissen A und B, die auf seinem Raumschiff stattfinden, in folgendem Verhältnis zum Zeitintervall $t_{\text{B,Erde}} - t_{\text{A,Erde}}$ zwischen den gleichen Ereignissen, wie es mit Uhren gemessen wird die auf der Erde in Ruhe sind:

$$t_{\text{B,Willi}} - t_{\text{A,Willi}} \overset{(43)}{=} (t_{\text{B,Erde}} - t_{\text{A,Erde}})\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{55}$$

In den Beschleunigungsphasen ist v nicht konstant. Aber durch

$$t_{\text{B,Willi}} - t_{\text{A,Willi}} \overset{(55)}{=} \int\limits_{t_{\text{A,Erde}}}^{t_{\text{B,Erde}}} \mathrm{d}t_{\text{Erde}} \sqrt{1 - v^2(t_{\text{Erde}})/c^2} \tag{56}$$

mit zeitabhängiger Geschwindigkeit $v(t_{\text{Erde}})$ kann man (55) auf die Beschleunigungsphasen ausdehnen. Beim Start von Willi's Raumschiff sind seine Borduhr und die Uhr auf der Erde synchronisiert, und wir setzen beide auf Null:

$$t_{\text{start,Willi}} = t_{\text{start,Erde}} = 0 \tag{57}$$

Laut Willi's Borduhr sind 3 Monate = 0.25 Jahre vergangen, wenn er die Geschwindigkeit $0.98c$ erreicht hat und zum ersten mal den Antrieb seines Raumschiffs abschaltet. Dies Ereignis nennen wir B . Aus (56) folgt

$$0.25\,\text{Jahre}_{\text{Willi}} \overset{(56)}{=} \int\limits_{0}^{t_{\text{B,Erde}}} \mathrm{d}t_{\text{Erde}} \sqrt{1 - v^2(t_{\text{Erde}})/c^2}\ . \tag{58}$$

Wir haben bisher noch nicht festgelegt, ob

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t_{\text{Willi}}} = \frac{0.98c}{0.25\,\text{Jahre}_{\text{Willi}}} = \text{Konstante}_{\text{C}} \tag{59a}$$

$$\text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t_{\text{Erde}}} = \frac{0.98c}{t_{\text{B,Erde}}} = \text{Konstante}_{\text{E}} \tag{59b}$$

ist, oder wie sonst die Beschleunigung im Detail abläuft. Da das Verhältnis $\mathrm{d}t_{\mathrm{Erde}}/\,\mathrm{d}t_{\mathrm{Willi}}$ während der Beschleunigungsphasen nicht konstant ist, können (59a) und (59b) nicht beide realisiert sein. Um die Berechnung nicht unnötig schwer zu machen, legen wir uns jetzt willkürlich auf (59b) fest. Mit dieser Spezifikation ist während der ersten Beschleunigungsphase

$$v(t_{\mathrm{Erde}}) = \frac{0.98c}{t_{\mathrm{B,Erde}}} \cdot t_{\mathrm{Erde}} \ , \tag{60}$$

und folglich gilt

$$0.25\,\mathrm{Jahre}_{\mathrm{Willi}} \overset{(58),(60)}{=} \int\limits_0^{t_{\mathrm{B,Erde}}} \mathrm{d}t_{\mathrm{Erde}} \sqrt{1 - 0.98^2\,\frac{t_{\mathrm{Erde}}^2}{t_{\mathrm{B,Erde}}^2}} \ .$$

Mit der Substitution

$$x = \frac{t_{\mathrm{Erde}}}{t_{\mathrm{B,Erde}}} \qquad , \qquad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t_{\mathrm{Erde}}}{t_{\mathrm{B,Erde}}} \tag{61}$$

folgt daraus

$$\begin{aligned} 0.25\,\mathrm{Jahre}_{\mathrm{Willi}} &= t_{\mathrm{B,Erde}} \int\limits_0^1 \mathrm{d}x\,\sqrt{1 - 0.98^2 x^2} = \\ &= t_{\mathrm{B,Erde}} \cdot \left[\frac{x}{2}\sqrt{1 - 0.98^2 x^2} - \frac{1}{2 \cdot 0.98} \cdot \arcsin(-0.98x)\right]_0^1 = \\ &= t_{\mathrm{B,Erde}} \cdot 0.7987 \ . \end{aligned} \tag{62}$$

Die Stammfunktion des Integrals stammt aus Nummer 245 in [9]. Die erste Beschleunigungsphase, die laut Willi's Borduhr 0.25 Jahre dauerte, dauerte also (0.25/0.7987) Jahre = 0.313 Jahre laut der auf der Erde ruhenden Uhr. Alle Beschleunigungsphasen zusammen, die laut Willi's Borduhr 1 Jahr dauerten, dauerten laut der auf der Erde ruhenden Uhr $4 \cdot 0.313$ Jahre $= 1.252$ Jahre.

Für die Flugzeit ohne Beschleunigung haben wir das Integral (56) bereits in (49) gelöst. Demnach wäre Andi, wenn er seinen kurzen Raumflug nicht gemacht sondern ständig auf der Erde geblieben wäre, am Tag von Willi's Rückkehr (Willi's 31. Geburtstag) $(20 + 1.252 + 50)$ Jahre $= 71.252$ Jahre alt.

Literatur

[1] A. Einstein : *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 891 – 920 (1905), http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004

[2] Euclid: *Elements*, Ed.: J. L Heiberg (greek text) (B. G. Teubner, Leipzig, 1883 – 1916) english translation: R. Fitzpatrick, Univ. Texas, 2007 http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf

[3] David Hilbert: *Grundlagen der Geometrie* (B. G. Teubner, Stuttgart, 1899) http://www.archive.org/details/grunddergeovon00hilbrich

[4] A. Einstein : *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys. (Leipzig) **49**, 769 – 822 (1916) http://dx.doi.org/10.1002/andp.19163540702

[5] Isaac Newton: *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Guil. & Joh. Innys, London, 3rd ed. 1726) http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-1235 , English translation: https://archive.org/details/newtonspmathema00newtrich or https://en.wikisource.org/wiki/The_Mathematical_Principles_of_Natural_Philosophy_(1846) deutsche Übersetzung: https://archive.org/details/mathematischepr00newtgoog

[6] Bureau International de Poids es Mesure: *SI Brochure: The International System of Units (SI)* publication available at https://www.bipm.org

[7] *Anmerkungen zur Speziellen Relativitätstheorie* APIN Mitteilung sd05211 (2010) http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd05211.pdf

[8] R. A. Pepino, R. W. Mabile: *Pedagogical Materials and Suggestions to Cure Misconceptions Connecting Special and General Relativity*, arXiv 1907.02497 (2019) https://arxiv.org/abs/1907.02497

[9] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik* (Harry Deutsch, Zürich und Frankfurt/Main, 1973)