Rotationen und Translationen

Eigentliche Drehungen, Spiegelungen, und Translationen von Kartesischen Koordinaten-Systemen und Kugelkoordinaten-Systemen

Übersicht
Die Transformationsmatrizen, mit denen sich eigentliche Rotationen, uneigentliche Rotationen (d.h. Spiegelungen), und Translationen im 3-dimensionalen Euklidischen Raum beschreiben lassen, werden für Kartesische Koordinaten und für Kugelkoordinaten hergeleitet.

Inhalt

1. Aktive und Passive Transformationen

Räumliche Transformationen ändern die Relationen zwischen Objekten und den Koordinaten, mit denen ihre Position beschrieben wird. Ob man sich dabei vorstellt, dass die Objekte relativ zum Koordinatensystem bewegt werden (aktive Transformation), oder ob man sich vorstellt dass das Koordinatensystem relativ zu den Objekten bewegt wird (passive Transformation), ist zwar im Effekt egal. Bei der formalen Beschreibung treten aber bei aktiven Transformation andere Vorzeichen auf als bei passiven, deshalb muss man sorgfältig auf Konsistenz achten.

Als Beispiel betrachten wir eine Verschiebung in kartesischen Koordinaten:

* Aktive Transformation A: Der Punkt (5,3,2) wird um +5 in z-Richtung verschoben. Nach der aktiven Verschiebung hat er die Koordinaten (5,3,7).
* Die inverse aktive Transformation A^{-1}: Der Punkt (5,3,7) wird um -5 in z-Richtung verschoben. Nach der aktiven Verschiebung hat er die Koordinaten (5,3,2).
* Passive Transformation P: Das Koordinatensystem wird um +5 in z-Richtung verschoben. Ein Punkt, der vorher die Koordinaten (5,3,7) hatte, hat nach der passiven Verschiebung die Koordinaten (5,3,2).
* Die inverse passive Transformation P^{-1}: Das Koordinatensystem wird um -5 in z-Richtung verschoben. Ein Punkt, der vorher die Koordinaten (5,3,2) hatte, hat nach der passiven Verschiebung die Koordinaten (5,3,7).

Offensichtlich

* hat A dieselbe Wirkung wie P^{-1},
* hat A^{-1} dieselbe Wirkung wie P,

$*$ sind A^{-1} und P die inversen Transformationen zu A und P^{-1}.

Dieser Zusammenhang von aktiven und passiven Transformationen gilt allgemein:

$$A = P^{-1} \tag{1a}$$

$$A^{-1} = P \tag{1b}$$

Wir werden im Folgenden immer und ausschliesslich passive Transformationen betrachten. Wenn man die Matrizen der aktiven Transformationen benötigt, findet man sie jederzeit gemäss (1) als Matrizen der inversen passiven Transformation.

2. Kugelkoordinaten und Kartesische Koordinaten

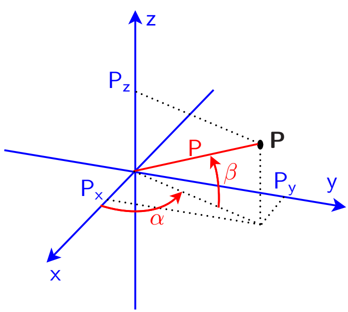

Abb. 1: Definition der Koordinaten

Die Position des Punktes $\mathbf{P}$ wird in kartesischen Koordinaten angegeben durch

$$\mathbf{P} = (\mathsf{P}_x, \mathsf{P}_y, \mathsf{P}_z) \ . \tag{2}$$

Seine Kugelkoordinaten sind

$$\mathbf{P} = \{\mathsf{P}, \alpha, \beta\} \ . \tag{3}$$

Warnung: Manche Autoren messen β nicht von der x-y-Ebene aus, sondern von der z-Achse aus, d.h. sie definieren $(\pi/2) - \beta$ statt unserem β. Wir verwenden β immer so, wie in Abbildung 1 dargestellt. Dabei wird β von der x-y-Ebene aus in Richtung der positiven z-Achse positiv gezählt, in Richtung der negativen z-Achse negativ.

Umrechnung von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten:

$$\mathsf{P}_x = \mathsf{P} \cdot \cos\beta \cdot \cos\alpha \tag{4a}$$
$$\mathsf{P}_y = \mathsf{P} \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \tag{4b}$$
$$\mathsf{P}_z = \mathsf{P} \cdot \sin\beta \tag{4c}$$

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten:

$$\mathsf{P} = \sqrt{\mathsf{P}_x^2 + \mathsf{P}_y^2 + \mathsf{P}_z^2} \tag{5a}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{\mathsf{P}_y}{\sqrt{\mathsf{P}_x^2 + \mathsf{P}_y^2}}\right) & \text{falls } \mathsf{P}_x \geq 0 \text{ und } \sqrt{\mathsf{P}_x^2 + \mathsf{P}_y^2} > 0 \\ \pi - \arcsin\left(\dfrac{\mathsf{P}_y}{\sqrt{\mathsf{P}_x^2 + \mathsf{P}_y^2}}\right) & \text{falls } \mathsf{P}_x < 0 \text{ und } \sqrt{\mathsf{P}_x^2 + \mathsf{P}_y^2} > 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{falls } \sqrt{\mathsf{P}_x^2 + \mathsf{P}_y^2} = 0 \end{cases} \tag{5b}$$

$$\beta = \begin{cases} \arcsin\left(\dfrac{\mathsf{P}_z}{\mathsf{P}}\right) & \text{falls } \mathsf{P} > 0 \\ \text{nicht definiert} & \text{falls } \mathsf{P} = 0 \end{cases} \tag{5c}$$

Wenn man (5b) und (5c) für den Computer programmiert, ist es meist besser einen Zahlenwert – z.B. Null – statt des Resultats „nicht definiert“ einzusetzen. Das ist unschädlich, und spart die Programmierung vieler Fallunterscheidungen, wenn (5) in umfangreichere Programme eingebaut wird.

3. Eigentliche Rotationen

Jede eigentliche Drehung des Koordinatensystems kann als Hintereinanderschaltung einer Drehung φ um die z-Achse, einer anschliessenden Drehung ψ um die neue x′-Achse, und schliesslich einer Drehung χ um die neue z″-Achse dargestellt werden. Da in der Astronomie besonders häufig Rotationen um zwei (aber nicht drei) Achsen angewandt werden zur Umrechnung zwischen Horizontalen, Ekliptischen und Äquatorialen Koordinaten, leiten wir die Transformationsmatrizen für 2-Achsen-Drehungen explizit her. Wir entwickeln den Formalismus zunächst in Kartesischen Koordinaten, anschliessend in Kugelkoordinaten.

3.1. Eigentliche Rotation von Kartesischen Koordinaten

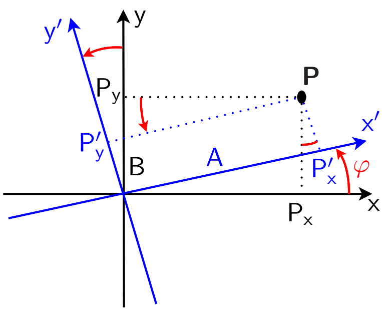

Abb. 2: Rotation φ um die z-Achse

1. Schritt: Das Koordinatensystem wird um die z-Achse gedreht, der Drehwinkel ist φ. Im neuen System′ hat $\boldsymbol{P}$ die Komponenten (P'_x, P'_y, P'_z). Aus Abbildung 2 liest man ab:

$$P_y = B + A\sin\varphi \qquad (6)$$

$$P'_y = B\cos\varphi \qquad (7)$$

$$P'_x = A + B\sin\varphi \qquad (8)$$

$$P_x = A\cos\varphi \qquad (9)$$

Wir lösen (6) nach B auf, und multiplizieren mit $\sin\varphi$:

$$B\sin\varphi = P_y\sin\varphi - A\sin^2\varphi \qquad (10)$$

Einsetzen von (10) in (8) ergibt:

$$\begin{aligned} P'_x &= A + P_y \sin\varphi - A\sin^2\varphi \\ &= P_y \sin\varphi + A\cos^2\varphi \quad \text{wegen } 1 - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi \\ &= P_y \sin\varphi + P_x \cos\varphi \quad \text{wegen (9)} \end{aligned} \tag{11}$$

Wir lösen (6) nach B auf, und multiplizieren mit $\cos\varphi$:

$$B\cos\varphi = P_y\cos\varphi - A\cos\varphi\sin\varphi \tag{12}$$

Einsetzen von (12) in (7) ergibt:

$$\begin{aligned} P'_y &= P_y\cos\varphi - A\cos\varphi\sin\varphi \\ &= P_y\cos\varphi - P_x\sin\varphi \quad \text{wegen (9)} \end{aligned} \tag{13}$$

Die z-Komponente bleibt bei der Rotation um die z-Achse unverändert:

$$P'_z = P_z \tag{14}$$

(11), (13), und(14) lassen sich in einer Matrixgleichung zusammenfassen:

Die passive Rotation φ um die z-Achse wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Wir geben auch gleich noch die inverse Transformation $R_z^{-1}(\varphi) = R_z(-\varphi)$ an:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = R_z^{-1}(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = R_z(-\varphi) \cdot \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix}$$

$$R_z^{-1}(\varphi) = R_z(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

Natürlich gilt

$$R_z^{-1}(\varphi) \cdot R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{17}$$

2. Schritt : Im Anschluss an die erste Drehung wird das Koordinatensystem jetzt um die x'-Achse gedreht, der Drehwinkel ist ψ.

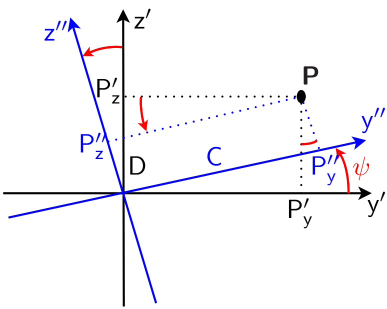

Abb. 3: Rotation ψ um die x′-Achse

Durch Vergleich der Abbildungen 2 und 3 erkennt man, dass es nicht nötig ist die Transformation $R_{x'}(\psi)$ neu herzuleiten. Wir brauchen nur in der Transformation $R_z(\varphi)$ die folgenden formalen Ersetzungen vorzunehmen:

$P_x \longrightarrow P'_y$ $\qquad$ $P'_x \longrightarrow P''_y$
$P_y \longrightarrow P'_z$ $\qquad$ $P'_y \longrightarrow P''_z$
$P_z \longrightarrow P'_x$ $\qquad$ $P'_z \longrightarrow P''_x$
$\varphi \longrightarrow \psi$

Damit können wir $R_{x'}(\psi)$ sofort anschreiben:

Die passive Rotation ψ um die x′-Achse wird beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix} = R_{x'}(\psi) \cdot \begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix}$$

$$R_{x'}(\psi) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{18}$$

Die inverse Transformation ist

$$\begin{pmatrix} P'_x \\ P'_y \\ P'_z \end{pmatrix} = R^{-1}_{x'}(\psi) \cdot \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix} = R_{x'}(-\psi) \cdot \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}_{x'}(\psi) = R_{x'}(-\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{19}$$

Jetzt schalten wir die beiden Teilschritte hintereinander:

$$\begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix} = R_{x'}(\psi) \cdot R_z(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \tag{20}$$

mit

$$\begin{aligned} R_{x'}(\psi) \cdot R_z(\varphi) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & \sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\psi\sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi \\ \sin\psi\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi & \cos\psi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{21}$$

Die inverse Transformation ist:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \Big(R_{x'}(\psi) \cdot R_z(\varphi)\Big)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix}$$

$$= R_z^{-1}(\varphi) \cdot R_{x'}^{-1}(\psi) \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix} \tag{22}$$

mit

$$R_z^{-1}(\varphi) \cdot R_{x'}^{-1}(\psi) = R_z(-\varphi) \cdot R_{x'}(-\psi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi & -\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\psi & -\cos\varphi\sin\psi \\ 0 & \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{23}$$

Demzufolge ist die Transformationsmatrix, wenn *zuerst* die passive Rotation ψ um die x-Achse und *dann* die passive Rotation φ um die neue z-Achse durchgeführt wird:

$$R_z(\varphi) \cdot R_{x'}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{24}$$

Zusammenfassung:

Zuerst passive Drehung φ um die z-Achse, dann passive Drehung ψ um die x′-Achse:

$$\begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix} = R_{x'}(\psi) \cdot R_z(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix}$$

$$R_{x'}(\psi) \cdot R_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\cos\psi\sin\varphi & \cos\psi\cos\varphi & \sin\psi \\ \sin\psi\sin\varphi & -\sin\psi\cos\varphi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{25}$$

Zuerst passive Drehung ψ um die x″-Achse (= x′-Achse), dann passive Drehung φ um die z′-Achse (= z-Achse):

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = R_z(\varphi) \cdot R_{x'}(\psi) \cdot \begin{pmatrix} P''_x \\ P''_y \\ P''_z \end{pmatrix}$$

$$R_z(\varphi) \cdot R_{x'}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\varphi\sin\psi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\cos\psi & \cos\varphi\sin\psi \\ 0 & -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{26}$$

3.2. Eigentliche Rotationen von Kugelkoordinaten

Wir setzen (4) in (25) ein:

$$\begin{pmatrix} P\cos\beta''\cos\alpha'' \\ P\cos\beta''\sin\alpha'' \\ P\sin\beta'' \end{pmatrix} = R_{x'}(\psi) \cdot R_z(\varphi) \cdot \begin{pmatrix} P\cos\beta\cos\alpha \\ P\cos\beta\sin\alpha \\ P\sin\beta \end{pmatrix} \tag{27}$$

P kürzt sich heraus, da P sich ja bei der Rotation nicht ändert. Mit der Transformationsmatrix (25) erhalten wir die drei Komponentengleichungen

$$\cos\beta''\cos\alpha'' = \cos\varphi\cos\beta\cos\alpha + \sin\varphi\cos\beta\sin\alpha \tag{28a}$$

$$\cos\beta''\sin\alpha'' = -\cos\psi\sin\varphi\cos\beta\cos\alpha + \cos\psi\cos\varphi\cos\beta\sin\alpha + \sin\psi\sin\beta \tag{28b}$$

$$\sin\beta'' = \sin\psi\sin\varphi\cos\beta\cos\alpha - \sin\psi\cos\varphi\cos\beta\sin\alpha + \cos\psi\sin\beta\ . \tag{28c}$$

β'' kann sofort als $\arcsin\{(28c)\}$ berechnet werden. α'' ist nur dann definiert, wenn $\beta'' \neq \pm\pi/2$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist $\cos\beta'' \neq 0$, und wir erhalten aus (28a) und (28b):

$$\cos\alpha'' = \frac{\cos\varphi\cos\beta\cos\alpha + \sin\varphi\cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta''} \tag{29a}$$

$$\sin\alpha'' = \frac{-\cos\psi\sin\varphi\cos\beta\cos\alpha + \cos\psi\cos\varphi\cos\beta\sin\alpha + \sin\psi\sin\beta}{\cos\beta''} \tag{29b}$$

Die Funktionen arccos und arcsin sind mehrdeutig, aber durch Kombination von (29a) und (29b) kann man α'' eindeutig bestimmen:
Falls $\cos\alpha'' \geq 0$ ist, liegt α'' im 1. oder im 4. Quadranten.
Falls $\cos\alpha'' < 0$ ist, liegt α'' im 2. oder im 3. Quadranten.
Falls $\sin\alpha'' \geq 0$ ist, liegt α'' im 1. oder im 2. Quadranten.
Falls $\sin\alpha'' < 0$ ist, liegt α'' im 3. oder im 4. Quadranten.

Zusammenfassung:

Zuerst passive Drehung φ um die z-Achse, dann passive Drehung ψ um die x$'$-Achse, ergibt in Kugelkoordinaten:

$$P'' = P \tag{30a}$$

$$\alpha'' = \begin{cases} \arcsin\left\{ \dfrac{-\cos\psi\sin\varphi\cos\beta\cos\alpha + \cos\psi\cos\varphi\cos\beta\sin\alpha + \sin\psi\sin\beta}{\cos\beta''} \right\} \\ \quad \text{falls } \cos\beta'' \neq 0 \text{ und } \dfrac{\cos\varphi\cos\beta\cos\alpha + \sin\varphi\cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta''} \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left\{ \dfrac{-\cos\psi\sin\varphi\cos\beta\cos\alpha + \cos\psi\cos\varphi\cos\beta\sin\alpha + \sin\psi\sin\beta}{\cos\beta''} \right\} \\ \quad \text{falls } \cos\beta'' \neq 0 \text{ und } \dfrac{\cos\varphi\cos\beta\cos\alpha + \sin\varphi\cos\beta\sin\alpha}{\cos\beta''} < 0 \\ \text{nicht definiert} \quad \text{falls } \cos\beta'' = 0 \end{cases} \tag{30b}$$

$$\beta'' = \arcsin\{\sin\psi\sin\varphi\cos\beta\cos\alpha - \sin\psi\cos\varphi\cos\beta\sin\alpha + \cos\psi\sin\beta\} \tag{30c}$$

Um auch die umgekehrte Reihenfolge der Transformationen (erst Rotation um die x-Achse, dann Rotation um die z-Achse) zu beschreiben, setzen wir (4) in (26) ein:

$$\begin{pmatrix} P\cos\beta\cos\alpha \\ P\cos\beta\sin\alpha \\ P\sin\beta \end{pmatrix} = R_z(\varphi)\cdot R_{x'}(\psi)\cdot \begin{pmatrix} P\cos\beta''\cos\alpha'' \\ P\cos\beta''\sin\alpha'' \\ P\sin\beta'' \end{pmatrix} \tag{31}$$

Mit der Transformationsmatrix (26) erhalten wir die drei Komponentengleichungen

$$\begin{aligned} \cos\beta\cos\alpha =& \cos\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' \\ & + \sin\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \sin\varphi\sin\psi\sin\beta'' \quad (32a) \\ \cos\beta\sin\alpha =& -\sin\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' \\ & + \cos\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \cos\varphi\sin\psi\sin\beta'' \quad (32b) \\ \sin\beta =& -\sin\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \cos\psi\sin\beta'' \; . \quad (32c) \end{aligned}$$

β kann sofort als $\arcsin\{(32c)\}$ berechnet werden. α ist nur dann definiert, wenn $\beta \neq \pm\pi/2$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist $\cos\beta \neq 0$, und wir erhalten aus (32a) und (32b):

$$\cos\alpha = \frac{\cos\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' + \sin\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \sin\varphi\sin\psi\sin\beta''}{\cos\beta} \tag{33a}$$

$$\sin\alpha = \frac{-\sin\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' + \cos\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \cos\varphi\sin\psi\sin\beta''}{\cos\beta} \tag{33b}$$

Die Funktionen arccos und arcsin sind mehrdeutig, aber durch Kombination von (33a) und (33b) kann man α eindeutig bestimmen:
Falls $\cos\alpha \geq 0$ ist, liegt α im 1. oder im 4. Quadranten.
Falls $\cos\alpha < 0$ ist, liegt α im 2. oder im 3. Quadranten.

Falls $\sin\alpha \geq 0$ ist, liegt α im 1. oder im 2. Quadranten.
Falls $\sin\alpha < 0$ ist, liegt α im 3. oder im 4. Quadranten.

Zusammenfassung:

Zuerst passive Drehung ψ um die x′-Achse, dann passive Drehung φ um die z-Achse, ergibt in Kugelkoordinaten:

$$P = P'' \tag{34a}$$

$$\alpha = \begin{cases} \arcsin\left\{ \dfrac{-\sin\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' + \cos\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \cos\varphi\sin\psi\sin\beta''}{\cos\beta} \right\} \\ \quad \text{falls } \cos\beta \neq 0 \text{ und } \left(\dfrac{\cos\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' + \sin\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \sin\varphi\sin\psi\sin\beta''}{\cos\beta} \right) \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left\{ \dfrac{-\sin\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' + \cos\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \cos\varphi\sin\psi\sin\beta''}{\cos\beta} \right\} \\ \quad \text{falls } \cos\beta \neq 0 \text{ und } \left(\dfrac{\cos\varphi\cos\beta''\cos\alpha'' + \sin\varphi\cos\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \sin\varphi\sin\psi\sin\beta''}{\cos\beta} \right) < 0 \\ \text{nicht definiert} \quad \text{falls } \cos\beta = 0 \end{cases} \tag{34b}$$

$$\beta = \arcsin\{-\sin\psi\cos\beta''\sin\alpha'' + \cos\psi\sin\beta''\} \tag{34c}$$

Wenn man (34b) für den Computer programmiert, ist es meist besser einen Zahlenwert – z.B. Null – statt des Resultats „nicht definiert" einzusetzen. Das ist unschädlich, und spart die Programmierung vieler Fallunterscheidungen, wenn (34) in umfangreichere Programme eingebaut wird.

4. Spiegelungen

Spiegelungen werden auch als „uneigentliche Rotationen" bezeichnet. Spiegelungen an den Hauptebenen des Koordinatensystems:

Kartesische Koordinaten:

$$(\mathsf{P}_x, \mathsf{P}_y, \mathsf{P}_z) \xrightarrow{\text{Spiegelebene: xz}} (\mathsf{P}_x, -\mathsf{P}_y, \mathsf{P}_z) \tag{35a}$$

$$(\mathsf{P}_x, \mathsf{P}_y, \mathsf{P}_z) \xrightarrow{\text{Spiegelebene: yz}} (-\mathsf{P}_x, \mathsf{P}_y, \mathsf{P}_z) \tag{35b}$$

$$(\mathsf{P}_x, \mathsf{P}_y, \mathsf{P}_z) \xrightarrow{\text{Spiegelebene: xy}} (\mathsf{P}_x, \mathsf{P}_y, -\mathsf{P}_z) \tag{35c}$$

Kugelkoordinaten:

$$\{\mathsf{P}, \alpha, \beta\} \xrightarrow{\text{Spiegelebene: xz}} \{\mathsf{P}, -\alpha, \beta\} \tag{36a}$$

$$\{\mathsf{P}, \alpha, \beta\} \xrightarrow{\text{Spiegelebene: yz}} \{\mathsf{P}, \pi-\alpha, \beta\} \tag{36b}$$

$$\{\mathsf{P}, \alpha, \beta\} \xrightarrow{\text{Spiegelebene: xy}} \{\mathsf{P}, \alpha, -\beta\} \tag{36c}$$

Will man an einer anderen Ebene spiegeln, dreht man diese am besten durch Anwendung der Formeln aus Abschnitt 3 in eine der Hauptebenen, spiegelt dann, und dreht wieder zurück.

5. Translationen

Translationen lassen sich in kartesischen Koordinaten sehr einfach beschreiben, in Kugelkoordinaten dagegen nur recht umständlich. Deshalb ist der beste Weg, Kugelkoordinaten zunächst gemäss (4) in Kartesische Koordinaten umzuwandeln, dann die Translation auszuführen, und schliesslich das Ergebnis mithilfe von (5) wieder in Kugelkoordinaten zurückzuwandeln.

Passive Translation $(\mathsf{t}_x, \mathsf{t}_y, \mathsf{t}_z)$ in kartesischen Koordinaten:

$$(\mathsf{P}_x, \mathsf{P}_y, \mathsf{P}_z) \xrightarrow{(\mathsf{t}_x,\mathsf{t}_y,\mathsf{t}_z)} (\mathsf{P}_x - \mathsf{t}_x, \mathsf{P}_y - \mathsf{t}_y, \mathsf{P}_z - \mathsf{t}_z) \tag{37}$$

6. Macros im Netz

Man kann aus dem Netz einen Excelfile laden[1], in dem mehrere der in diesem Artikel hergeleiteten Formeln[2] als benutzerdefinierte Funktionen verfügbar sind:

* Umrechnung von Kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten, unsere Gleichung (5)
* Umrechnung von Kugelkoordinaten in Kartesischen Koordinaten, unsere Gleichung (4)
* Rotation von Kugelkoordinaten, erst z dann x, Gleichung (30)
* Rotation von Kugelkoordinaten, erst x dann z, Gleichung (34)

[1] Der File (Excel, 380KB) liegt hier: https://www.astrophys-neunhof.de/utls/kw2.xls

[2] Die Rotations-Macros können natürlich auf für einfache Rotationen verwendet werden, indem der zweite Drehwinkel gleich Null gesetzt wird. Ebenso kann man sie zur Berechnung von 3-Achsen-Rotationen verwenden, indem man eine 2-Achsen-Transformation und eine 1-Achsen-Transformation (oder drei 1-Achsen-Transformationen) hintereinander schaltet.