Energie und Impuls des Metrischen Feldes

Übersicht

In der Allgemeine Relativitätstheorie tritt das metrische Feld der vierdimensionalen Raum-Zeit an die Stelle des Gravitationspotentials der Newton'schen Theorie, und die Christoffel-Symbole (die im Wesentlichen aus den Ableitungen des metrischen Feldes nach den vier Raum-Zeit-Koordinaten bestehen) treten an die Stelle der Gravitationskraft. Dementsprechend kann das metrische Feld der ART, genauso wie Newton's Gravitationspotential, Energie und Impuls speichern und mit anderen Feldern austauschen. In diesem Artikel werden insbesondere der Energie-Spannungs-Tensor des metrischen Feldes, und die „dynamischen" Energie-Spannungs-Tensoren der anderen, in der Raum-Zeit enthaltenen Felder untersucht.

1. Notation

Wir gehen aus von der Einstein'schen Feldgleichung

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi\, G}{c^4}\, T_{\mu\nu}\ , \tag{1}$$

in der $(R_{\mu\nu})$ der Ricci-Tensor, $R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ der Ricci-Skalar, $(g_{\mu\nu})$ der metrische Tensor, Λ die kosmologische Konstante, G die Gravitationskonstante, und c die Lichtgeschwindigkeit ist. $(T_{\mu\nu})$ ist der Energiedichte-Impulsdichte-Tensor sämtlicher Felder, die in der Raum-Zeit enthalten sind (also aller Felder mit Ausnahme des metrischen Feldes selbst). Für diesen Tensor sind auch die kürzeren Bezeichnungen Energie-Impuls-Tensor oder Energie-Tensor oder Energie-Spannungs-Tensor üblich. Wir werden ihn meist kurzerhand ES-Tensor nennen.

Mit einer Ausnahme benutzen wir für Tensoren und ihre Kontraktionen die gleichen Namen:

$$g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} = g^{\mu\nu} R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\nu}{}_{\nu} = R \tag{2}$$

Wenn betont werden soll, dass der komplette Tensor und nicht nur eine seiner Komponenten gemeint ist, schreiben wir $(R_{\mu\nu})$. In einer vereinfachenden Schreibweise verwenden wir aber oft auch $R_{\mu\nu}$ als Bezeichnung des kompletten Tensors. Dann geht nur aus dem Zusammenhang hervor, ob der Tensor oder lediglich eine seiner Komponenten gemeint ist. Bei Vektoren bedeutet $A \equiv (A^{\nu})$.

Die Ausnahme ist der metrische Tensor. Für seine Kontraktion

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g^{\nu}{}_{\nu} = 4 \tag{3}$$

benutzen wir *nicht* den Buchstaben g. Dieser wird vielmehr definiert als die Determinante des metrischen Tensors:

$$g \equiv \det(g_{\alpha\beta}) = \Big|(g_{\alpha\beta})\Big| \tag{4}$$

Der metrische Tensor ist symmetrisch, es gilt $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. Deshalb kann er an jedem beliebigen Raum-Zeit-Punkt P (aber im allgemeinen nicht global) in eine Diagonalmatrix transformiert werden. Darüber hinaus kann man die Transformation (an jedem Punkt, aber nicht global) so wählen, dass man die Minkowski-Metrik erhält. Wir definieren sie in der Form

$$(\eta_{\alpha\beta}) \equiv \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1) \ . \tag{5}$$

Das Koordinatensystem mit der Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ ist das lokale Inertialsystem LS (d. h. das Koordinatensystem des Tangentialraums am Punkt P). Das LS ist ein Laborsystems eines frei fallenden Volumens, dessen Ausdehnung in Raum und Zeit endlich ist, weil andernfalls Gezeitenkräfte auftreten würden. In Strenge ist das LS sogar infinitesimal klein. Von den Inertialsystemen der Speziellen Relativitätstheorie unterscheidet sich das LS dadurch, dass in ihm keine Gravitationskräfte auftauchen.

Die Ableitung nach x^μ kennzeichnen wir entweder durch ein klein geschriebenes d oder durch einen Strich vor dem Index:

$$\frac{\mathrm{d}\,A^\nu}{\mathrm{d}\,x^\mu} \equiv \mathrm{d}_\mu A^\nu \equiv A^\nu_{\ |\mu} \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\,A_\nu}{\mathrm{d}\,x^\mu} \equiv \mathrm{d}_\mu A_\nu \equiv A_{\nu|\mu} \ . \tag{6}$$

Ricci und Levi-Civita haben gezeigt, dass die Metrik $g_{\mu\nu}$ an jedem Punkt der Raumzeit mithilfe eines „Vierbeins“ auf die Minkowski-Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ des Tangentialraums in diesem Punkt bezogen werden kann[1]. Das Vierbein besteht aus vier kovarianten Einheitsvektoren $\overrightarrow{e}_\mu$ mit $\mu = 0, 1, 2, 3$, die den Tangentialraum aufspannen. Während $\mathrm{d}x^\mu$ nur eine Komponente des vierdimensionalen Vektors $\mathrm{d}x$ ist, handelt es sich bei jedem einzelnen der vier Vektoren $\overrightarrow{e}_\mu$ um einen kompletten vierdimensionalen Vektor. Um das zu betonen, wurden diese Vektoren ausnahmsweise mit Pfeilen notiert. Alle anderen vierdimensionalen Vektoren, zum Beispiel $\mathrm{d}x$, erkennt man nur daran dass sie keinen Komponentenindex tragen. Die zu den vier Einheitsvektoren $\overrightarrow{e}_\mu$ dualen kontravarianten Einheitsvektoren werden definiert durch die Relation

$$\overrightarrow{e}^{\nu}\,\overrightarrow{e}_\mu = \overrightarrow{e}^{\nu\alpha}\,\overrightarrow{e}_\mu{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = g^{\nu}{}_{\mu} = \eta^{\nu}{}_{\mu} \tag{7a}$$

Sie erfüllen die Relationen

$$\overrightarrow{e}^{\mu}{}_{\alpha}\,\overrightarrow{e}_\mu{}^{\beta} = \eta_\alpha{}^{\beta} = g_\alpha{}^{\beta} \tag{7b}$$

$$\overrightarrow{e}_\nu\,\overrightarrow{e}_\mu = e_\nu{}^{\alpha}\,e_\mu{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta} = g_{\nu\mu}\ . \tag{7c}$$

Insbesondere gilt für den Nabla-Operator

$$\nabla = \overrightarrow{e}^{\mu}\,\mathrm{d}_\mu\ . \tag{8}$$

Also ist die Divergenz eines kontravarianten Vektorfeldes $A(x)$

$$\begin{aligned}\nabla A &= \overrightarrow{e}^{\mu}\,\mathrm{d}_\mu \overrightarrow{e}_\nu A^\nu = \overrightarrow{e}^{\mu}\,\overrightarrow{e}_\nu \mathrm{d}_\mu A^\nu + \overrightarrow{e}^{\mu} A^\nu \mathrm{d}_\mu \overrightarrow{e}_\nu \\ &= g^{\mu}{}_{\nu}\mathrm{d}_\mu A^\nu + A^\alpha g^{\mu}{}_{\nu}\underbrace{\overrightarrow{e}^{\nu}\mathrm{d}_\mu\overrightarrow{e}_\alpha}_{\Gamma^\nu_{\mu\alpha}} = g^{\mu}{}_{\nu}\Big(\underbrace{\mathrm{d}_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}A^\alpha}_{\mathrm{D}_\mu A^\nu}\Big)\ .\end{aligned} \tag{9}$$

Auf diese Weise wird die kovariante Ableitung

$$\mathrm{D}_\mu A^\nu \equiv \mathrm{d}_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}A^\alpha \tag{10}$$

definiert, die – anders als im allgemeinen die „normale“ Ableitung $\mathrm{d}_\mu A^\nu$ – ein Tensor ist. Die kovariante Ableitung kennzeichnen wir entweder durch das Zeichen D oder durch zwei parallele Striche vor dem Index:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\mu A^\nu &\equiv A^\nu_{||\mu} \equiv \mathrm{d}_\mu A^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}A^\alpha \\ \mathrm{D}_\mu A_\nu &\equiv A_{\nu||\mu} \equiv \mathrm{d}_\mu A_\nu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu}A_\alpha\end{aligned} \tag{11}$$

Die direkte Berechnung der Christoffel-Symbole ergibt [2, Kap. 11]

$$\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \equiv \overrightarrow{e}^{\beta}\mathrm{d}_\nu\overrightarrow{e}_\alpha = \frac{g^{\beta\lambda}}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}\,g_{\nu\lambda}}{\mathrm{d}\,x^\alpha} + \frac{\mathrm{d}\,g_{\alpha\lambda}}{\mathrm{d}\,x^\nu} - \frac{\mathrm{d}\,g_{\alpha\nu}}{\mathrm{d}\,x^\lambda}\Big)\ . \tag{12}$$

Im LS verschwinden die Christoffel-Symbole $\Gamma^{\nu}_{\mu\alpha}$, so dass die kovariante Ableitung und die „normale" Ableitung identisch sind.

Der Krümmungstensor $R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau}$ wird definiert durch die Differenz

$$\begin{aligned} & R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau} A_{\mu} \equiv A_{\rho||\tau||\sigma} - A_{\rho||\sigma||\tau} \\ \Longrightarrow \quad & R^{\mu}{}_{\rho\sigma\tau} \overset{[2,\ (18.8)]}{=} \frac{\mathrm{d}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}}{\mathrm{d}\,x^{\tau}} - \frac{\mathrm{d}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\tau}}{\mathrm{d}\,x^{\sigma}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\sigma}\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} - \Gamma^{\nu}_{\rho\tau}\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma} \ . \end{aligned} \tag{13}$$

Den in der Feldgleichung (1) enthalten Ricci-Tensor erhält man durch Verjüngung des Krümmungstensors bezüglich der Indizes μ und σ:

$$R_{\rho\tau} \equiv R^{\mu}{}_{\rho\mu\tau} = \frac{\mathrm{d}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\mu}}{\mathrm{d}\,x^{\tau}} - \frac{\mathrm{d}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\tau}}{\mathrm{d}\,x^{\mu}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} - \Gamma^{\nu}_{\rho\tau}\Gamma^{\mu}_{\nu\mu} \tag{14}$$

2. Die Lagrangedichte der leeren Raum-Zeit

Wir wollen Energie und Impuls des metrischen Feldes mithilfe des Lagrange-Formalismus untersuchen. Dazu müssen wir zunächst eine Lagrangedichte finden, aus der die Feldgleichung (1) nach dem Hamilton'schen Prinzip der kleinsten Wirkung abgeleitet werden kann. Die folgenden Überlegungen stützen sich hauptsächlich auf [3, Kap. 19].

Wir nennen die gesuchte Lagrangedichte des leeren metrischen Feldes („klassisches Vakuum") $\mathcal{L}_{EH}$. Der Index $_{EH}$ soll Einstein-Hilbert bedeuten. Wir schreiben die Lagrangedichte als Produkt

$$L\sqrt{|g|} \equiv \mathcal{L}_{EH} \tag{15}$$

mit einer (zunächst ebenfalls unbekannten) Funktion L, die wie $\mathcal{L}_{EH}$ die Dimension Energie/Volumen hat. Das Volumenelement

$$\mathrm{d}^4x'\sqrt{|g'|} = \mathrm{d}^4x\sqrt{|g|} \tag{16}$$

ist invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen, also ein Skalar, siehe [4, (18)] oder [2, (17.11)]. Wir verlangen, dass die Wirkung

$$S = \int\limits_{\omega} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c} \, \underbrace{\sqrt{|g|}\, L}_{\mathcal{L}_{EH}} \,, \tag{17}$$

in der ω einen einfach zusammenhängenden abgeschlossenen Bereich der vierdimensionalen Raumzeit bezeichnet, ebenfalls ein Skalar sein soll. Deshalb muss auch L – anders als $\mathcal{L}_{EH}$ – ein Skalar sein. Dies ist die erste Forderung, von der wir uns bei der Suche nach L leiten lassen.

Eine zweite Forderung an L ergibt sich aus folgender Überlegung: Die Einstein'sche Feldgleichung des Vakuums hängt ab vom metrischen Tensor $(g_{\mu\nu})$, sowie quadratisch von seinen ersten und linear von seinen zweiten Ableitungen. Also verlangen wir, dass auch L von $(g_{\mu\nu})$ und seinen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in gleicher Weise abhängen soll, aber nicht von seinen Ableitungen höherer Ordnung. In [5, chap. 6.2] wird bewiesen, dass der Ricci-Skalar $R \equiv R^{\mu}{}_{\mu}$ der einzige Skalar ist, der in dieser Weise von $(g_{\mu\nu})$ abhängt.

Eine dritte Forderung an L ergibt sich aus dimensionalen Überlegungen: L soll die Dimension

$$[L] = \frac{\text{Energie}}{\mathrm{m}^3} = \frac{1}{\mathrm{m}^2} \, \frac{\mathrm{kg\,s}^2}{\mathrm{m}^3} \, \frac{\mathrm{m}^4}{\mathrm{s}^4} = [R] \, \frac{[c^4]}{[G]} \tag{18}$$

$$[R] = \mathrm{m}^{-2} \quad , \quad [c] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \quad , \quad [G] = \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

haben. Als vierte und letzte Forderung verlangen wir, dass die Einstein'sche Feldtheorie die Newton'sche Gravitationstheorie als Grenzfall enthalten soll.

Die Summe

$$L \equiv \frac{c^4}{16\pi G}\,(R - 2\Lambda) \tag{19}$$

mit einer beliebigen Konstanten Λ (die wie R die Dimension m^{-2} haben muss) erfüllt alle vier Forderungen an L. Damit erhält man die Wirkung

$$S = \int\limits_{\omega} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c}\, \underbrace{\frac{\sqrt{|g|}\, c^4}{16\pi G}\,(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\Lambda)}_{\mathcal{L}_{EH}}\ . \tag{20}$$

Nach dem Hamilton'schen Prinzip muss die Variation von S Null sein. Zu variieren ist dabei nach den Komponenten $g^{\mu\nu}$ des metrischen Feldes, sowie ihren im Ricci-Tensor enthaltenen ersten und zweiten Ableitungen nach den Raum-Zeit-Koordinaten:

$$\delta S = \delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3 = 0 \tag{21}$$

$$\delta S_1 \equiv \frac{c^3}{16\pi G} \int\limits_{\omega} \mathrm{d}^4 x \left(\delta\sqrt{|g|}\right) (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - 2\Lambda)$$

$$\delta S_2 \equiv \frac{c^3}{16\pi G} \int\limits_{\omega} \mathrm{d}^4 x \sqrt{|g|} \left(\delta g^{\mu\nu}\right) R_{\mu\nu}$$

$$\delta S_3 \equiv \frac{c^3}{16\pi G} \int\limits_{\omega} \mathrm{d}^4 x \sqrt{|g|}\, g^{\mu\nu} \left(\delta R_{\mu\nu}\right) \tag{22}$$

Man beachte, dass $\delta \int_\omega \mathrm{d}^4 x \ = 0$ ist. Denn wir verlangen, dass $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta\, \mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu}$, und $\delta\, \mathrm{d}_\alpha \mathrm{d}_\beta g^{\mu\nu}$ auf dem Rand (und außerhalb) des kompakten vierdimensionalen Volumens ω Null sein sollen. Nur im Inneren von ω werden die Metrik und ihre Ableitungen variiert.

Zur Berechnung von δS_1 benötigen wir

$$\delta\sqrt{|g|} = \delta\sqrt{-g} = \frac{-\delta(g)}{2\sqrt{-g}}\ . \tag{23}$$

Jacobi hat die Formel

$$\delta \det(A^{\mu\nu}) = \det(A^{\mu\nu}) \operatorname{Sp}\{(A^{\mu\nu})^{-1} \delta(A^{\mu\nu})\} \tag{24}$$

für beliebige quadratische Matrizen $(A^{\mu\nu})$ mit nicht-verschwindender Determinante angegeben. Im Fall des metrischen Tensors ergibt sich mit $(g_{\mu\nu})^{-1} = (g^{\mu\nu})$

$$\delta(g) = g \operatorname{Sp}\{(g^{\mu\nu}) \delta(g_{\mu\nu})\} = g\, g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu} \ . \tag{25}$$

Damit erhält man

$$\delta\sqrt{|g|} \overset{(23)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\mu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{\mu\nu} \delta g^{\nu\mu} \ . \tag{26}$$

Zum Beweis der letzten Gleichung machen wir die Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
\delta g^{\mu}{}_{\nu} = 0 = \delta g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = (\delta g^{\mu\rho}) g_{\rho\nu} + g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\nu} \quad & \Big| \cdot g^{\nu\sigma} \\
(\delta g^{\mu\rho}) g_{\rho}{}^{\sigma} = -g^{\nu\sigma} g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\nu} \quad & \Big| \mu \leftrightarrow \rho \\
\delta g^{\rho\sigma} = -g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} \delta g_{\mu\nu} \quad & \Big| \cdot A_{\rho\sigma} \\
A_{\rho\sigma}\, \delta g^{\rho\sigma} = -A^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \ , &
\end{aligned} \tag{27}$$

wobei $(A^{\mu\nu})$ ein beliebiger Tensor ist.

δS_2 lassen wir unverändert. Zur Berechnung von δS_3 betrachten wir zunächst den Krümmungstensor vierter Ordnung $R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} =$ (13). Man transformiert ihn in ein Koordinatensystem, das an einem willkürlich bestimmten Punkt P die Metrik (5) hat. Dann sind an diesem Punkt die Christoffel-Symbole Null, und die Variation des Krümmungstensors vereinfacht sich zu

$$\begin{aligned}
\delta R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} &= \frac{\mathrm{d}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho})}{\mathrm{d}x^{\nu}} - \frac{\mathrm{d}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})}{\mathrm{d}x^{\rho}} \\
&= (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho})_{|\nu} - (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})_{|\rho} \quad \text{im LS am Punkt } P \ .
\end{aligned} \tag{28}$$

Im LS sind die kovariante Ableitung und die „normale“ Ableitung identisch.

$$\delta R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} = (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho})_{||\nu} - (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})_{||\rho} \ . \tag{29}$$

Weil $\delta R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} = R'^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu} - R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu}$ als Differenz zweier Tensoren ebenfalls ein Tensor ist, gilt diese Gleichung, bei der es sich um die Palatini-Gleichung handelt, nicht nur im LS am Punkt P, sondern an jedem beliebigen Punkt in jedem beliebigen Koordinatensystem. Jetzt kontrahieren wir σ und ρ

$$\delta R_{\mu\nu} = (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma})_{||\nu} - (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})_{||\sigma} \ , \tag{30}$$

und setzen das Ergebnis ein in

$$\delta S_3 = \frac{c^3}{16\pi G} \int\limits_{\omega} \mathrm{d}^4x \, \sqrt{|g|} \, \underbrace{g^{\mu\nu}\Big((\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma})_{||\nu} - (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu})_{||\sigma}\Big)}_{(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\sigma} - g^{\mu\tau}\delta\Gamma^{\nu}_{\mu\tau})_{||\nu}} \ . \tag{31}$$

Der metrische Tensor darf in die Klammer gezogen werden, weil seine kovariante Ableitung Null ergibt. Außerdem wurden im letzten Summanden kontrahierte Indizes umbenannt. Wenn man verlangt, dass die Variation von Γ auf der Oberfläche $A(\omega)$ des Volumens ω Null ist, dann ist δS_3 Null. Das erkennt man mithilfe des auf den Riemann'schen Raum verallgemeinerten Gauß'schen Satzes

$$\int\limits_{\omega} \mathrm{d}^4x \, \sqrt{|g|} \, V^{\mu}{}_{||\mu} = \int\limits_{A(\omega)} \mathrm{d}^3x \, \sqrt{|g|} \, n_{\mu} V^{\mu} \ , \tag{32}$$

in dem $A(\omega)$ die dreidimensionale Oberfläche des vierdimensionalen Volumens ω bedeutet, n der Einheitsvektor senkrecht auf dieser Oberfläche ist, V ein beliebiges Vektorfeld ist, und g die Determinante des metrischen Tensors im System der Koordinaten x ist.

Damit erhält man schließlich die Einstein'sche Feldgleichung des Vakuums:

$$\delta S \overset{(21)}{=} \frac{c^3}{16\pi G} \int\limits_{\omega} \mathrm{d}^4x \sqrt{|g|} \Big(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} \left(R - 2\Lambda \right) \Big)\, \delta g^{\nu\mu} = 0 \quad (33)$$

$$\Longrightarrow \quad R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} + \Lambda\, g_{\mu\nu} = 0$$

Diese Gleichung ist (abgesehen vom ES-Tensor $T_{\mu\nu}$ der in der Raum-Zeit enthaltenen anderen Felder) identisch mit der Feldgleichung (1). Also ist $\mathcal{L}_{EH} =$ (20) eine korrekte Lagrangedichte der leeren Raum-Zeit.

3. Energie- und Impulserhaltung des Metrischen Feldes

Als Einstein 1916 den ersten Übersichtsartikel zur jungen Allgemeinen Relativitätstheorie veröffentlichte [4], legte er großen Wert auf den Nachweis der Energieerhaltung des metrischen Feldes, das in dieser Theorie an die Stelle des Newton'schen Gravitationspotentials tritt. In §15 seiner Abhandlung betrachtet er die Energie- und Impulserhaltung des Metrischen Feldes allein, also im Fall einer gekrümmten, aber leeren Raum-Zeit. In §16 bis §18 erweitert er die Untersuchung dann vom Vakuum auf den Fall, dass die gekrümmte Raum-Zeit ein elektromagnetisches Feld und/oder materielle Felder enthält. Er zeigt, dass in diesem Fall Energie und Impuls zwischen dem metrischem Feld und den in ihm enthaltenen Feldern ausgetauschte werden, so dass Erhaltungssätze nur für das metrische Feld und seinen Inhalt gemeinsam gelten, jedoch nicht für das metrische Feld oder die anderen Felder allein. Wir werden uns in diesem Abschnitt eng an Einsteins Darstellung anlehnen.

Zunächst setzen wir die Kosmologische Konstante $\Lambda = 0$ und formen die Feldgleichung (1) um:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} &\overset{(1)}{=} -\frac{8\pi\, G}{c^4}\, T_{\mu\nu} \quad \Big| \cdot g^{\mu\nu} \\ R - \frac{R}{2}\, \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{4} &= -R = -\frac{8\pi\, G}{c^4}\, T \\ \Longrightarrow \qquad R_{\mu\nu} &= -\frac{8\pi\, G}{c^4}\Big(T_{\mu\nu} - \frac{T}{2}\, g_{\mu\nu}\Big) \end{aligned} \tag{34}$$

* In seiner Formel (29a) gibt Einstein für das Christoffel-Symbol mit einer Kontraktion folgende wichtige Relation an:

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\mu} = \frac{g^{\mu\alpha}}{2}\frac{\mathrm{d}g_{\mu\alpha}}{\mathrm{d}x^{\rho}} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,\ln|g|}{\mathrm{d}\,x^{\rho}} \qquad \text{mit } g \equiv \det(g_{\alpha\beta}) \tag{35}$$

* Mit (35) lässt sich der Ricci-Tensor (14) auch in der Form

$$R_{\rho\tau} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\ln|g|}{\mathrm{d}x^{\rho}\mathrm{d}x^{\tau}} - \frac{\mathrm{d}\,\Gamma^{\mu}_{\rho\tau}}{\mathrm{d}\,x^{\mu}} + \Gamma^{\nu}_{\rho\mu}\Gamma^{\mu}_{\nu\tau} - \Gamma^{\nu}_{\rho\tau}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\,\ln|g|}{\mathrm{d}\,x^{\nu}} \tag{36}$$

 schreiben.
* Einstein schränkt seine Untersuchungen auf Koordinatensysteme ein, deren Metrik die Determinante $|\det(g_{\mu\nu})| = |g| = 1$ haben. Aus (35) und (36) erkennt man, dass sich der Umfang der Formeln damit enorm reduziert. Auf Seite 815 versichert Einstein, dass er die Untersuchungen auch für den Fall $|g| \neq 1$ durchgeführt habe, und dass man dabei die prinzipiell gleichen Ergebnisse wie im Fall $|g| = 1$ erhalte. „Doch glaube ich, daß sich eine Mitteilung meiner ziemlich umfangreichen Betrachtungen über diesen Gegenstand nicht lohnen würde, da doch etwas sachlich Neues dabei nicht herauskommt.“ Man beachte, dass es sich bei der Voraussetzung $|g| = 1$ nicht etwa um die Rückkehr

zur Minkowski-Metrik handelt. Für diese gilt zwar auch $|g| = 1$, Einstein betrachtet aber gekrümmte Raum-Zeiten mit

$$\frac{\mathrm{d}\, g_{\mu\nu}}{\mathrm{d}\, x^{\sigma}} \neq 0 \quad , \quad \Gamma^{\mu}_{\nu\tau} \neq 0 \quad , \quad |\det(g_{\mu\nu})| = |g| = 1 \quad .$$

Während das Christoffel-Symbol im allgemeinen verschieden von Null ist, ergibt seine kontrahierte Form im Fall $|g| = 1$ Null, wie man aus (35) erkennt.

* Die Feldgleichungen der Raumbereiche („Vakuum“), die keinerlei Energie mit Ausnahme von Gravitationsenergie enthalten, vereinfachen sich zu

$$R_{\mu\nu} \overset{(34),(36)}{=} -\frac{\mathrm{d}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}}{\mathrm{d}\, x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\beta} = 0 \quad \text{falls } |g| = 1 \ , \tag{37}$$

und die oben überprüfte Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{EH} \overset{(20)}{=} \frac{\sqrt{|g|}}{2\kappa}\,(R - 2\Lambda) \qquad , \qquad \kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \tag{38}$$

wird mit $\Lambda = 0$ in diesem Fall zu

$$\mathcal{L}_{EH} \overset{(36)}{=} \frac{1}{2\kappa}\Big(- g^{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}\,\Gamma^{\beta}_{\mu\nu}}{\mathrm{d}\, x^{\beta}} + g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\alpha\nu}\Big) \quad \text{falls } |g| = 1 \ . \tag{39}$$

Bekanntlich ändert sich die Variation des Wirkungsintegrals nicht, wenn man zur Lagrangedichte die Vierer-Divergenz einer beliebigen Funktion der Raum-Zeit addiert, siehe z. B. [6, Kap. 3]. Weil die kovariante Ableitung des metrischen Tensors Null ergibt, gilt

$$\mathrm{D}_{\beta} g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(\mathrm{d}_{\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} + \Gamma^{\beta}_{\beta\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}) \overset{(35)}{=} g^{\mu\nu}\mathrm{d}_{\beta}\Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \quad \text{falls } |g| = 1 \ .$$

Indem man diese Viererdivergenz mit $1/(2\kappa)$ multipliziert und zur Lagrangedichte (39) addiert, erhält man die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2\kappa}\, g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \quad \text{mit } \kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4} \quad \text{falls } |g| = 1 \ . \tag{40}$$

Dies ist die Lagrangedichte, von der Einstein ausgeht. Er überprüft zunächst explizit, dass die Feldgleichung (37) durch Variation der Wirkung

$$\delta S = \delta \int\limits_{\omega} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c}\,\sqrt{|g|}\,\frac{\mathcal{L}}{\sqrt{|g|}} = 0 \qquad \text{mit } |g| = 1$$

abgeleitet werden kann. ω ist ein einfach zusammenhängender kompakter Bereich des vierdimensionalen Raum-Zeit-Kontinuums. Weil auf dem Rand (und außerhalb) von ω nicht variiert wird, und nach Voraussetzung $|g| = 1$ gilt, ist die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ der einzige Faktor der Wirkung, der variiert wird.

$$\begin{aligned} 2\kappa\,\delta\mathcal{L} &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\,\delta g^{\mu\nu} + 2g^{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\delta\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha} \\ &= 2\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\underbrace{\delta\left(g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\right)}_{\frac{1}{2}\,\delta\Big[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\Big(\frac{\mathrm{d}\,g_{\nu\lambda}}{\mathrm{d}\,x^{\alpha}} + \frac{\mathrm{d}\,g_{\alpha\lambda}}{\mathrm{d}\,x^{\nu}} - \frac{\mathrm{d}\,g_{\alpha\nu}}{\mathrm{d}\,x^{\lambda}}\Big)\Big]} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\,\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{41}$$

Beim Vergleich mit Einstein's Formel auf Seite 804 unten ist zu beachten, dass wir das Christoffel-Symbol (12) mit umgekehrtem Vorzeichen definieren. Weil das Christoffel-Symbol in den beiden unteren Indizes symmetrisch ist, dürfen im unterklammerten Ausdruck μ und β, und demzufolge auch ν und λ vertauscht werden. Deshalb verschwinden die beiden letzten Terme des unterklammerten Ausdrucks:

$$2\kappa\,\delta\mathcal{L} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\,\delta\Big[g^{\mu\nu}g^{\beta\lambda}\frac{\mathrm{d}\,g_{\nu\lambda}}{\mathrm{d}\,x^{\alpha}}\Big] - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\,\delta g^{\mu\nu} \tag{42}$$

Mit

$$g^{\nu\tau} g^{\mu\rho} \frac{\mathrm{d}g_{\tau\rho}}{\mathrm{d}x^\sigma} = g^{\nu\tau} \underbrace{\frac{\mathrm{d}(g^{\mu\rho} g_{\tau\rho})}{\mathrm{d}x^\sigma}}_{0} - g^{\nu\tau} \frac{\mathrm{d}g^{\mu\rho}}{\mathrm{d}x^\sigma} g_{\tau\rho} = -\frac{\mathrm{d}g^{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^\sigma} \tag{43a}$$

$$g_{\nu\tau} g_{\mu\rho} \frac{\mathrm{d}g^{\tau\rho}}{\mathrm{d}x^\sigma} = g_{\nu\tau} \underbrace{\frac{\mathrm{d}(g_{\mu\rho} g^{\tau\rho})}{\mathrm{d}x^\sigma}}_{0} - g_{\nu\tau} \frac{\mathrm{d}g_{\mu\rho}}{\mathrm{d}x^\sigma} g^{\tau\rho} = -\frac{\mathrm{d}g_{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^\sigma} \tag{43b}$$

folgt

$$2\kappa\,\delta\mathcal{L} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\,\delta\Big(\frac{\mathrm{d}\,g^{\mu\nu}}{\mathrm{d}\,x^\alpha}\Big) - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}\,\delta g^{\mu\nu}\ . \tag{44}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Differentialquotienten ablesen, die zur Berechnung der kanonischen Feldgleichung erforderlich sind:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu})} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} &= 0 \\ -\mathrm{d}_\alpha\,\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha} &= 0 \qquad \text{falls } |g| = 1 \end{aligned} \tag{45}$$

Diese Feldgleichung ist identisch mit (37). Also ist $\mathcal{L} =$ (40) unter der Voraussetzung $|g| = 1$ tatsächlich eine korrekte Lagrangedichte. Jetzt multipliziert Einstein die Feldgleichung mit $\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu})\mathrm{d}_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu})} - (\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \\ &= \mathrm{d}_\alpha(\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu})} \underbrace{- \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu})}\,\mathrm{d}_\sigma\mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\,\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu}}_{-\mathrm{d}_\sigma\mathcal{L}} \end{aligned} \tag{46}$$

Hier wurde $\mathrm{d}_\alpha\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu} = \mathrm{d}_\sigma\mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu}$ genutzt. Dies ist die Kontinuitätsgleichung des Energietensors $t_\sigma{}^\alpha$:

$$\mathrm{d}_\alpha t_\sigma{}^\alpha = 0 \tag{47}$$

$$\begin{aligned} -2\kappa t_\sigma{}^\alpha &\equiv (\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}_\alpha g^{\mu\nu})} - g_\sigma{}^\alpha\mathcal{L} \\ &\overset{(40)}{=} -(\mathrm{d}_\sigma g^{\mu\nu})\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g_\sigma{}^\alpha g^{\mu\nu}\Gamma^\tau_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\tau} \qquad \text{falls } |g| = 1 \end{aligned} \tag{48}$$

Man beachte, dass die Definition des Energietensors die gleiche Form hat wie die Definition des Energietensors anderer Felder in der kanonischen Feldtheorie in Minkowski-Metrik [6, Kap. 4]. Hier betrachten wir aber Metriken mit $\mathrm{d}g^{\rho\sigma}/\mathrm{d}x^\tau \neq 0$, denn sonst wäre $t_\sigma{}^\alpha = 0$. Der Faktor -2κ wurde eingefügt, um im Grenzfall schwacher Gravitation die Energie des Newton'schen Gravitationsfeldes zu erhalten. (Einstein untersucht diesen Grenzfall in §21 seiner Abhandlung.)

Man beachte zweitens, dass $(t_\sigma{}^\alpha)$ streng genommen kein Tensor ist, weil er nicht form-invariant unter beliebigen Koordinatentransformationen ist. Denn er gilt ja nur unter der Einschränkung $|g| = 1$. Diese Einschränkung hat sich bereits bei der Definition (40) der Lagrangedichte angedeutet: $\mathcal{L}/\sqrt{|g|}$ ist kein Riemann-Skalar unter beliebigen Transformationen, sondern nur mit der Nebenbedingung $|g| = 1$. Trotzdem werden wir weiterhin – etwas ungenau – die Matrix $(t_\sigma{}^\alpha) = (48)$ als Energiedichte-Spannungs-Tensor oder kurz als ES-Tensor des metrischen Feldes unter der Nebenbedingung $|g| = 1$ bezeichnen.

Um zu klären, wie der ES-Tensor mit der Gleichung des metrischen Feldes zusammenhängt, macht Einstein zunächst folgende Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} g^{\nu\tau}\Gamma^\mu_{\sigma\tau} + g^{\mu\tau}\Gamma^\nu_{\sigma\tau} = g^{\nu\tau}\frac{g^{\mu\rho}}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}g_{\tau\rho}}{\mathrm{d}x^\sigma} + \frac{\mathrm{d}g_{\sigma\rho}}{\mathrm{d}x^\tau} - \frac{\mathrm{d}g_{\sigma\tau}}{\mathrm{d}x^\rho}\Big) + \\ + g^{\mu\tau}\frac{g^{\nu\rho}}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}g_{\tau\rho}}{\mathrm{d}x^\sigma} + \frac{\mathrm{d}g_{\sigma\rho}}{\mathrm{d}x^\tau} - \frac{\mathrm{d}g_{\sigma\tau}}{\mathrm{d}x^\rho}\Big) \end{aligned} \tag{49}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung kompensieren sich vier Terme, die sich nur durch die Namen der kontrahierten Indizes ρ und τ unterscheiden. Also gilt

$$g^{\nu\tau}\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau} + g^{\mu\tau}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} = g^{\nu\tau}g^{\mu\rho}\frac{\mathrm{d}g_{\tau\rho}}{\mathrm{d}x^{\sigma}} \overset{(43)}{=} -\frac{\mathrm{d}g^{\mu\nu}}{\mathrm{d}x^{\sigma}}\ . \tag{50}$$

Damit kann man den ES-Tensor (48) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} -2\kappa t_{\sigma}{}^{\alpha} &= (g^{\nu\tau}\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau} + g^{\mu\tau}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau})\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - g_{\sigma}{}^{\alpha}g^{\mu\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\beta}\Gamma^{\beta}_{\nu\tau} \\ \kappa t_{\sigma}{}^{\alpha} &= \tfrac{1}{2}g_{\sigma}{}^{\alpha}g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\mu\beta} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \qquad \text{falls } |g| = 1 \qquad (51) \\ \kappa t = \kappa t_{\sigma}{}^{\sigma} &= g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\tau}\Gamma^{\tau}_{\mu\beta} \qquad \text{wegen } g_{\sigma}{}^{\sigma} = 4 \\ \kappa(t_{\sigma}{}^{\alpha} - \tfrac{1}{2}g_{\sigma}{}^{\alpha}t) &= -g^{\mu\nu}\Gamma^{\beta}_{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \qquad \text{falls } |g| = 1 \qquad (52) \end{aligned}$$

Die Feldgleichung (45) wird mit $g^{\nu\sigma}$ multipliziert:

$$-g^{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\mathrm{d}x^{\alpha}} + g^{\nu\sigma}\Gamma^{\beta}_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\mu} = 0 \qquad \text{falls } |g| = 1 \tag{53}$$

Der erste Term ist

$$\begin{aligned} -g^{\nu\sigma}\frac{\mathrm{d}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}{\mathrm{d}x^{\alpha}} &= -\frac{\mathrm{d}(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})}{\mathrm{d}x^{\alpha}} + \frac{\mathrm{d}g^{\nu\sigma}}{\mathrm{d}x^{\alpha}}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \\ &\overset{(50)}{=} -\frac{\mathrm{d}(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})}{\mathrm{d}x^{\alpha}} - g^{\sigma\tau}\Gamma^{\nu}_{\alpha\tau}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - g^{\nu\tau}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\tau}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} \qquad (54) \end{aligned}$$

Der zweite Term dieses Ausdrucks unterscheidet sich vom zweiten Term der Feldgleichung nur durch die Namen zweier kontrahierter Indizes. Damit erhält man die Feldgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}(g^{\nu\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu})}{\mathrm{d}x^{\alpha}} \underbrace{-g^{\nu\tau}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\tau}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}}_{+\kappa(t_{\mu}{}^{\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu}{}^{\sigma}t)} = 0 \qquad \text{falls } |g| = 1\ . \tag{55}$$

Aus dieser Gleichung wird unmittelbar klar, wie die Feldgleichung zu modifizieren ist, wenn es außer dem metrischen Feld auch noch andere Felder, z. B. ein elektromagnetisches Feld oder ein Materie-Feld gibt: Man summiert zum ES-Tensor des metrischen Feldes ${t_\mu}^\sigma$ die ES-Tensoren ${T_\mu}^\sigma$ der anderen Felder:

$$-\frac{\mathrm{d}\,(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\mu})}{\mathrm{d}\,x^\alpha} = -\kappa\,\Big({t_\mu}^\sigma + {T_\mu}^\sigma - \tfrac{1}{2}{g_\mu}^\sigma(t+T)\Big) \ \text{ falls } |g| = 1\ . \tag{56}$$

Wir bringen die Terme mit t, aber nicht die Terme mit T, auf die linke Seite der Gleichung, und transformieren sie von der Form (55) wieder zurück zur Form (53). Wenn man schließlich beide Seiten der Gleichung mit $g_{\nu\sigma}$ multipliziert, erhält man

$$R_{\mu\nu} = -\frac{\mathrm{d}\,\Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{\mathrm{d}\,x^\alpha} + \Gamma^\beta_{\nu\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\mu} = -\kappa\,(T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}g_{\mu\nu}T) \ \text{ falls } |g| = 1\ . \tag{57}$$

Um die Energie- und Impulserhaltung für die Kombination des metrischen Feldes und der materiellen Felder zu untersuchen, bildet Einstein die Kontraktion von (56) hinsichtlich der Indizes μ und σ, multipliziert das Ergebnis mit $\frac{1}{2}{g_\mu}^\sigma$, und zieht das Ergebnis von der ursprünglichen Gleichung (56) ab:

$$-\frac{\mathrm{d}\,(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\mu})}{\mathrm{d}\,x^\alpha} + \tfrac{1}{2}{g_\mu}^\sigma\frac{\mathrm{d}\,(g^{\nu\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\rho})}{\mathrm{d}\,x^\alpha} = \kappa\,({t_\mu}^\sigma + {T_\mu}^\sigma) \tag{58}$$

Dann berechnet er die Divergenz dieser Gleichung hinsichtlich des Index σ. Es ist

$$-\frac{\mathrm{d}^2(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\mu})}{\mathrm{d}x^\sigma\mathrm{d}x^\alpha} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^\sigma\mathrm{d}x^\alpha}\left[g^{\nu\sigma}\frac{g^{\alpha\tau}}{2}\Big(\frac{\mathrm{d}g_{\mu\tau}}{\mathrm{d}x^\nu} + \frac{\mathrm{d}g_{\nu\tau}}{\mathrm{d}x^\mu} - \frac{\mathrm{d}g_{\nu\mu}}{\mathrm{d}x^\tau}\Big)\right]\ .$$

Weil dieser Ausdruck invariant ist unter gleichzeitiger Vertauschung von α mit σ und ν mit τ, kompensieren sich der erste und der dritte Term in der großen runden Klammer.

$$-\frac{\mathrm{d}^2(g^{\nu\sigma}\Gamma^\alpha_{\nu\mu})}{\mathrm{d}x^\sigma \mathrm{d}x^\alpha} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^\sigma \mathrm{d}x^\alpha}\left[g^{\nu\sigma}\frac{g^{\alpha\tau}}{2}\frac{\mathrm{d}g_{\nu\tau}}{\mathrm{d}x^\mu}\right] \overset{(43)}{=} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^3 g^{\sigma\alpha}}{\mathrm{d}x^\sigma \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\mu} \tag{59a}$$

Die Divergenz des zweiten Summanden in (58) hinsichtlich des Index σ ist

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2(g^{\nu\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\rho})}{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\alpha}\left[g^{\nu\rho}\frac{g^{\alpha\tau}}{2}\left(\frac{\mathrm{d}g_{\rho\tau}}{\mathrm{d}x^\nu} + \frac{\mathrm{d}g_{\nu\tau}}{\mathrm{d}x^\rho} - \frac{\mathrm{d}g_{\nu\rho}}{\mathrm{d}x^\tau}\right)\right].$$

Der letzte Term ist wegen (35) für Metriken mit $|g| = 1$ Null. Der restliche Ausdruck ist in ν und ρ symmetrisch, so dass er zusammengefasst werden kann. Außerdem wird der kontrahierte Index ρ umbenannt in σ:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2(g^{\nu\rho}\Gamma^\alpha_{\nu\rho})}{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\alpha} = \frac{1}{4}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\alpha} g^{\nu\sigma}g^{\alpha\tau}\cdot 2\frac{\mathrm{d}g_{\nu\tau}}{\mathrm{d}x^\sigma} \overset{(43)}{=} -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^3 g^{\sigma\alpha}}{\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\sigma} \tag{59b}$$

Insgesamt ist also die Divergenz der linken Seite von (58) Null. Folglich muss für die rechte Seite das Gleiche gelten:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\sigma}\left(t_\mu{}^\sigma + T_\mu{}^\sigma\right) = 0 \qquad \text{falls } |g| = 1} \tag{60}$$

Dies Ergebnis besagt: Erhaltungssätze gelten weder für Energie und Impuls des metrischen Feldes allein, noch für Energie und Impuls der in der Raum-Zeit enthaltenen Felder allein. Nur die Summe der Energie und die Summe der Impulse des metrischen Feldes und seines Inhalts sind erhalten, d. h. Energie und Impuls können zwischen dem metrischen Feld und seinem Inhalt ausgetauscht werden.

Wir würden uns gerne von der Beschränkung $|g| = 1$ lösen, und stattdessen eine Formel der Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\sigma}\left(t_\mu{}^\sigma + T_\mu{}^\sigma\right) \overset{?}{=} 0 \quad \text{mit } |g| \text{ beliebig}$$

beweisen. Die genauere Untersuchung [7] zeigt aber, dass man im allgemeinen Fall keinen eindeutigen, geschlossenen Ausdruck für den Energie-Spannungs-Tensor des metrischen Feldes angeben kann.

Um wenigstens einen oberflächlichen Eindruck von der Energie-Impuls-Erhaltung im allgemeinen Fall mit beliebigem $|g|$ zu erhalten, bringen wir zunächst die Feldgleichung (57) in eine andere, ebenfalls oft – zum Beispiel in (1) – benutzte Form: Man bildet die Kontraktion

$$g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R = -\kappa\,(\underbrace{g^{\mu\nu} T_{\mu\nu}}_{T} - \tfrac{1}{2}\underbrace{g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}}_{4} T) = \kappa T\ ,$$

bringt den Ricci-Skalar R auf die linke Seite, und erhält die Feldgleichung in der Form

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2}\, g_{\mu\nu} = -\kappa\, T_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu}\ . \tag{61}$$

Aufgrund dieser Gleichung gilt trivialerweise auf jeden Fall

$$\mathrm{d}_\sigma\Big(\frac{R^{\sigma\tau}}{\kappa} - \frac{R}{2\kappa}\, g^{\sigma\tau}\Big) = -\mathrm{d}_\sigma T^{\sigma\tau}\ . \tag{62}$$

Der Tensor $R^{\sigma\tau}/\kappa - R g^{\sigma\tau}/(2\kappa) \neq \tau^{\sigma\tau}$ ist *nicht* der ES-Tensor des metrischen Feldes, aber offenbar ist seine Divergenz gleich der Divergenz des hypothetischen, nicht explizit formulierbaren ES-Tensors des metrischen Feldes.

In der speziellen Relativitätstheorie erfüllt der ES-Tensor $T_{\mu\nu}$ die Kontinuitätsgleichungen

$$T_{\mu\nu|\mu} = 0 \quad \text{mit } \nu = 0, 1, 2, 3 \ \text{ falls } g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}\ \forall x\ . \tag{63}$$

Diese Gleichung bedeutet die Erhaltung von Energie und Impuls derjenigen Felder (einschließlich des Gravitationsfeldes), die durch $(T_{\mu\nu})$ repräsentiert werden. Im Fall der ART werden dagegen Energie und Impuls, die im metrischen Feld gespeichert werden, nicht in $(T_{\mu\nu})$ verbucht, sondern irgendwo im Ricci-Tensor und im Ricci-Skalar auf der linken Seite der Gleichung (62).

Im Grenzfall der Schwerelosigkeit (frei fallendes Labor) gibt es zumindest in einer infinitesimal kleinen Umgebung jedes Punktes der Raum-Zeit ein lokales Koordinatensystem LS, für das die Minkowski-Metrik gilt. Im LS sind der Krümmungstensor und demzufolge der Tensor $R^{\sigma\tau}/\kappa - Rg^{\sigma\tau}/(2\kappa)$ Null. Folglich gilt

$$\mathrm{d}_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{im LS.} \tag{64}$$

Die kovariante Tensorgleichung, die diesen Grenzfall enthält und bei Transformationen in beliebig beschleunigte Bezugssysteme forminvariant bleibt, ist

$$\mathrm{D}_\nu\, T^{\mu\nu} = \mathrm{d}_\nu\, T^{\mu\nu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha} = 0\ . \tag{65}$$

Daraus folgt zusammen mit (62):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{d}_\nu\, T^{\mu\nu} &= -\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu} - \Gamma^{\nu}_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha} \\ \mathrm{d}_\nu \Big(\frac{R^{\mu\nu}}{\kappa} - \frac{R\, g^{\mu\nu}}{2\kappa}\Big) &= +\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} T^{\alpha\nu} + \Gamma^{\nu}_{\nu\alpha} T^{\mu\alpha} \end{aligned}} \tag{66}$$

Auf der rechten Seite dieser beiden Gleichungen steht explizit die Menge an Energie- und Impulsdichte, die zwischen dem metrischen Feld und seinem Inhalt ausgetauscht wird. Weder für das metrische Feld allein noch für die materiellen Felder allein gelten Erhaltungssätze, sondern nur für ihre Kombination. D. h. es werden Energie und Impuls zwischen der Raum-Zeit und ihrem materiellen Inhalt ausgetauscht. Nur im Vakuum $T^{\mu\nu} = 0$ vereinfacht sich die zweite

Gleichung zu

$$\mathrm{d}_\nu \Big(\frac{R^{\mu\nu}}{\kappa} - \frac{R\, g^{\mu\nu}}{2\kappa} \Big) = 0 \quad \text{falls } T^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{67}$$

4. Der dynamische ES-Tensor

Wir haben die freie Feldgleichung aus einer Lagrangedichte abgeleitet, dann aber in Gleichung (56) den ES-Tensor T „von Hand“ eingefügt. Nun wollen wir versuchen auch des ES-Tensor systematisch aus einer Lagrangedichte abzuleiten.

Eine geeignete Lagrangedichte hat Einstein in [8] vorgeschlagen. Dort nahm er an, dass die Lagrangedichte sowohl vom metrischen Feld $g^{\tau\mu}$ und seinen ersten und zweiten Ableitungen $\mathrm{d}_\alpha g^{\tau\mu}$ und $\mathrm{d}_\alpha \mathrm{d}_\beta g^{\tau\mu}$ abhängt, als auch von den in der Raumzeit enthaltenen Feldern ϕ_r und ihren ersten Ableitungen $\mathrm{d}_\alpha \phi_r$ (die Terme zwei Zeilen über seiner Gleichung (1) enthalten einen offensichtlichen Druckfehler). Zusätzlich macht er die Annahme, dass die Lagrangedichte als $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH} + \mathcal{L}_M$ geschrieben werden kann. $\mathcal{L}_{EH}$ ist die bereits in (20) angegebene Lagrangedichte der leeren Raum-Zeit, $\mathcal{L}_M$ ist die Lagrangedichte der in ihr enthaltenen Materie (einschließlich des elektromagnetischen Feldes). Außerdem nimmt er an, dass $\mathcal{L}_M$ nur von $(g^{\tau\sigma})$, ϕ_r und $\mathrm{d}_\mu \phi_r$ abhängt, aber nicht von den Ableitungen von $(g^{\tau\sigma})$. Wir übernehmen diesen Ansatz, und setzen in die Variation (21) des Wirkungsintegrals folgenden vierten Summanden ein:

$$\delta S_4 = \int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4 x}{c}\, \delta \mathcal{L}_M = \int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4 x}{c}\, \frac{\sqrt{|g|}}{2} \Big(\underbrace{\frac{2}{\sqrt{|g|}} \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}}}_{T_{\mu\nu}} \Big) \delta g^{\mu\nu} \ . \tag{68}$$

Der so definierte Tensor $T_{\mu\nu}$ ist der „dynamische“ Energiedichte-Spannungs-Tensor. Damit erhält man schließlich die Einstein’sche

Feldgleichung:

$$\begin{aligned}\delta S &\overset{(33)}{=} \frac{c^3}{16\pi G}\int\limits_{\omega} \mathrm{d}^4x\,\sqrt{|g|}\,\cdot\\ &\quad\cdot\Big(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,(R-2\Lambda)+\frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}\Big)\,\delta g^{\nu\mu}=0 \qquad (69)\\ \Longrightarrow\quad & R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}\,g_{\mu\nu}+\Lambda\,g_{\mu\nu}=-\frac{8\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\nu} \qquad (70)\end{aligned}$$

Als Einstein 1916 seinen Ansatz (68) veröffentlichte, nach dem die Variation δS_4 der Wirkung durch die Variation $\delta g^{\mu\nu}$ von $\mathcal{L}_M$ nach dem metrischen Feld vollständig beschrieben werden kann, da konnte er nicht ahnen dass Dirac zwölf Jahre später Spinorfelder in die Physik einführen würde. (68) ist im Fall von Spinorfeldern nicht korrekt. Eine Streckung der Metrik $g^{\mu\nu}$ entspricht einer Schrumpfung der Feldamplituden ψ und ihrer Ableitungen $\mathrm{d}_\mu\psi$ im Zeit-Orts-Raum. Aber die ebenfalls erforderliche Variation im Spinor-Raum kann durch die Variation $\delta g^{\mu\nu}$ nicht ersetzt werden.

Die linke Seite der Feldgleichung

$$R_{\mu\nu}-\frac{R}{2}\,g_{\mu\nu}+\Lambda\,g_{\mu\nu}\overset{(70)}{=}-\frac{8\pi\,G}{c^4}\,T_{\mu\nu} \qquad (71)$$

ist invariant unter Vertauschung von μ und ν. Also muss die rechte Seite es ebenfalls sein. Auf den ersten Blick scheint der in (68) definierte „dynamische“ ES-Tensor

$$T_{\mu\nu}\equiv\frac{2}{\sqrt{|g|}}\,\frac{\delta\mathcal{L}_M}{\delta g^{\mu\nu}} \qquad (72a)$$

dieser Forderung zu entsprechen. Denn $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$ ist symmetrisch, und $\mathcal{L}_M/\sqrt{|g|}$ ist ein Skalar. Seine Definition unterscheidet sich deutlich von der Definition des kanonischen ES-Tensors, die im

Fall einer starren Metrik (sprich: im Fall der speziellen Relativitätstheorie)

$$\mathcal{T}_{\mu\nu} \equiv \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}^\mu \phi_r)}\, \mathrm{d}_\nu \phi_r - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \quad \text{falls } g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}\,\forall x \tag{72b}$$

lautet, siehe z. B. [6, Kap. 4.2]. Hier ist über alle Komponenten aller Felder ϕ_r zu summieren, die in der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ vorkommen. Natürlich muss man verlangen, dass beide Definitionen (72) des ES-Tensors bei $g_{\mu\nu}(x) \to \eta_{\mu\nu}\,\forall x$ nahtlos ineinander übergehen. Wir werden jetzt untersuchen, ob die ES-Tensoren des reellen Klein-Gordan-Feldes, des elektromagnetischen Feldes, und des Diracfeldes symmetrisch sind.

(a) Reelles Klein-Gordan-Feld

Die metrisch kovariante Lagrangedichte des reellen Klein-Gordan-Feldes lautet

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{|g|}\Big(\frac{c^2\hbar^2}{2}\, g^{\mu\nu}(\mathrm{D}_\mu\phi)\mathrm{D}_\nu\phi - \frac{m^2c^4}{2}\,\phi^2\Big)\;. \tag{73}$$

Die Variation der Wirkung dieses Feldes nach dem inversen metrischen Feld $(g^{\mu\nu})$ ergibt

$$\begin{aligned}
\delta S = &\int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\,\Big(\delta\sqrt{|g|}\Big)\Big(\frac{c^2\hbar^2}{2}\, g^{\mu\nu}(\mathrm{D}_\mu\phi)\mathrm{D}_\nu\phi - \frac{m^2c^4}{2}\,\phi^2\Big) + \\
&+ \int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\,\sqrt{|g|}\,\frac{c^2\hbar^2}{2}\,\Big(\delta g^{\mu\nu}\Big)(\mathrm{D}_\mu\phi)\mathrm{D}_\nu\phi \\
\overset{(26)}{=} &\int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\,\frac{\sqrt{|g|}}{2}\,\Big[-g_{\mu\nu}\frac{c^2\hbar^2}{2}\, g^{\rho\sigma}(\mathrm{D}_\rho\phi)\mathrm{D}_\sigma\phi + g_{\mu\nu}\frac{m^2c^4}{2}\,\phi^2 + \\
&+ c^2\hbar^2\,(\mathrm{D}_\mu\phi)\mathrm{D}_\nu\phi\Big]\,\delta g^{\mu\nu} = 0\;.
\end{aligned} \tag{74}$$

Vergleicht man dies mit (69), findet man den dynamischen ES-Tensor

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= c^2\hbar^2\,(\mathrm{D}_\mu\phi)\mathrm{D}_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Big(\frac{c^2\hbar^2}{2}\,g^{\rho\sigma}(\mathrm{D}_\rho\phi)\mathrm{D}_\sigma\phi - \frac{m^2c^4}{2}\,\phi^2\Big) \\ &\overset{(73)}{=} c^2\hbar^2\,(\mathrm{D}_\mu\phi)\mathrm{D}_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M}{\sqrt{|g|}}\ . \end{aligned} \tag{75}$$

Im Grenzfall $g_{\mu\nu}(x) \to \eta_{\mu\nu}\,\forall x$ ist er mit dem kanonischen ES-Tensor identisch, siehe z. B. [6, Kap. 7.3]. Dieser ES-Tensor ist symmetrisch unter Vertauschung von μ und ν.

(b) Elektromagnetisches Feld

Die metrisch kovariante Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{|g|}\,\Big(-\frac{1}{4\mu_0}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu}\Big)\ . \tag{76}$$

Die Variation der Wirkung dieses Feldes nach dem inversen metrischen Feld ($g^{\mu\nu}$) ergibt

$$\begin{aligned} \delta S &= \int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\,\Big(\delta\sqrt{|g|}\Big)\Big(-\frac{1}{4\mu_0}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu}\Big) + \\ &+ \int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\,\sqrt{|g|}\,\Big(-\frac{1}{4\mu_0}\,(\delta g^{\mu\rho})g^{\nu\sigma}F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4\mu_0}\,g^{\mu\rho}(\delta g^{\nu\sigma})F_{\rho\sigma}F_{\mu\nu}\Big) \\ &\overset{(26)}{=} \int\limits_\omega \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\,\frac{\sqrt{|g|}}{2}\,\Big(-\frac{1}{\mu_0}\,F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma - g_{\mu\nu}\underbrace{\Big[-\frac{1}{4\mu_0}\,F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\Big]}_{\mathcal{L}_M\,/\,\sqrt{|g|}}\Big)\,\delta g^{\mu\nu}\ . \end{aligned}$$

Der Vergleich mit (69) zeigt, dass der Ausdruck in der runden Klammer der dynamische ES-Tensor ist:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\mu_0}\,F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma - \frac{g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M}{\sqrt{|g|}} \tag{77}$$

Der dynamische ES-Tensor ist symmetrisch unter Vertauschung von μ und ν. Dadurch unterscheidet er sich vom kanonischen ES-Tensor

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{\mu\nu} &= -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\tau} \mathrm{d}^\nu A_\tau - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \\ &= +\frac{1}{\mu_0} \Big((\mathrm{d}^\tau A^\mu) \mathrm{d}^\nu A_\tau - (\mathrm{d}^\mu A^\tau) \mathrm{d}^\nu A_\tau \Big) - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned} \tag{78}$$

des elektromagnetischen Feldes, wie man beispielsweise in [6, Anhang A.24] nachlesen kann. In [6, Anhang A.25] wird aber erklärt, wie man den kanonischen ES-Tensor – ohne die Erhaltungsgrößen zu verändern – so umformulieren kann, dass er symmetrisch wird. Der symmetrisierte kanonische ES-Tensor des elektromagnetischen Feldes lautet

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{1}{\mu_0} F^{\tau\mu} \mathrm{d}^\nu A_\tau - g^{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{1}{\mu_0} F^{\tau\mu} \mathrm{d}_\tau A^\nu \\ &= -\frac{1}{\mu_0} F^{\mu\tau} F^\nu{}_\tau - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \ , \end{aligned} \tag{79}$$

ist also im Grenzfall $g_{\mu\nu}(x) \to \eta_{\mu\nu} \, \forall x$ mit dem dynamischen ES-Tensor (77) identisch.

(c) Dirac-Feld

Die metrisch kovariante Lagrangedichte des Diracfeldes (z. B. des Elektron-Positron-Feldes) ist

$$\mathcal{L}_M = \sqrt{|g|} \, \overline{\psi} \Big(i\hbar c g^{\mu\nu} \gamma_\mu \mathrm{D}_\nu - mc^2 \Big) \psi \ . \tag{80}$$

Die Variation der Wirkung dieses Feldes nach dem inversen metrischen Feld $(g^{\mu\nu})$ ergibt

$$
\begin{aligned}
\delta S = & \int\limits_{\omega} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c} \left(\delta\sqrt{|g|}\right) \overline{\psi}\left(i\hbar c g^{\mu\nu}\gamma_\mu \mathrm{D}_\nu - mc^2\right)\psi + \\
& + \int\limits_{\omega} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c} \sqrt{|g|}\, \overline{\psi} i\hbar c(\delta g^{\mu\nu})\gamma_\mu \mathrm{D}_\nu \,\psi \\
\overset{(26)}{=} & \int\limits_{\omega} \frac{\mathrm{d}^4 x}{c} \sqrt{|g|} \left\{ \overline{\psi}\, i\hbar c \gamma_\mu \mathrm{D}_\nu \,\psi - \right. \\
& \left. - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \Big[\underbrace{\overline{\psi}\left(i\hbar c\gamma^\alpha \mathrm{D}_\alpha - mc^2\right)\psi}_{\mathcal{L}_M \,/\, \sqrt{|g|}} \Big] \right\} \delta g^{\mu\nu} \; .
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Der Vergleich mit (69) zeigt, dass der Ausdruck in der geschweiften Klammer der dynamische ES-Tensor ist:

$$
T_{\mu\nu} = \overline{\psi}\, i\hbar c \gamma_\mu \mathrm{D}_\nu \,\psi - \frac{g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M}{2\sqrt{|g|}}
\tag{82}
$$

Der ES-Tensor ist *nicht* symmetrisch unter Vertauschung von μ und ν:

$$
\overline{\psi}\,\gamma_\mu \mathrm{D}_\nu \,\psi \neq \overline{\psi}\,\gamma_\nu \mathrm{D}_\mu \,\psi
\tag{83}
$$

Er unterscheidet sich aber auch vom ebenfalls unsymmetrischen kanonischen ES-Tensor des Diracfeldes

$$
\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}^\mu\overline{\psi})}\,\mathrm{d}_\nu\overline{\psi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\mathrm{d}^\mu\psi)}\,\mathrm{d}_\nu\psi - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \\
&= \overline{\psi}\, i\hbar c\gamma_\mu \mathrm{d}_\nu\psi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}
\end{aligned}
\tag{84}
$$

durch einen Faktor 1/2 im letzten Summanden.

Man könnte den fehlerhaften dynamischen ES-Tensor kurzerhand durch den in [6, Anhang A.25] hergeleiteten symmetrisierten kanonischen ES-Tensor

$$T^{\rho\sigma} = \frac{i\hbar c}{4}\Big(- (\mathrm{d}^\rho\overline{\psi})\gamma^\sigma\psi - (\mathrm{d}^\sigma\overline{\psi})\gamma^\rho\psi + \overline{\psi}\gamma^\rho\mathrm{d}^\sigma\psi + \overline{\psi}\gamma^\sigma\mathrm{d}^\rho\psi\Big) - \\ - g^{\rho\sigma}\ \underbrace{\overline{\psi}(i\hbar c\gamma^\nu\mathrm{d}_\nu - mc^2)\psi}_{\mathcal{L}}\ , \tag{85}$$

ersetzen, der offensichtlich bei Vertauschung von ρ und σ symmetrisch ist. Tatsächlich liegt das Problem aber tiefer, und wäre damit nur vordergründig behoben. Felder, die nur Raum-Zeit-Komponenten haben (zum Beispiel das Klein-Gordan-Feld oder das elektromagnetische Feld) sind invariant unter einer Drehung von 2π um eine beliebige Achse des dreidimensionalen Ortsraums. Dagegen wechseln die Amplituden von Spinorfeldern (also aller Felder mit halbzahligem Spin) bei einer Drehung im Ortsraum von 2π das Vorzeichen, und sind nur invariant unter Drehungen von 4π. Das macht grundlegende Modifikationen der ART erforderlich, die über eine Korrektur des ES-Tensors weit hinausgehen. Beschrieben werden sie beispielsweise in [1].

Literatur

[1] M. D. Pollock : *On the Dirac Equation in Curved Space-Time* , Acta Phys. Pol. B **41**, 1827-1846 (2010) http://th-www.if.uj.edu.pl/acta/vol41/pdf/v41p1827.pdf

[2] Torsten Fließbach : *Allgemeine Relativitätstheorie* (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, $^{(4)}$2004)

[3] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, A. N. Lasenby : *General Relativity* (Cambridge Univ. Press, UK, 2006)

[4] A. Einstein : *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* , Ann. d. Phys. (IV) **49**, 769-822 (1916)
http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1916_49_769-822.pdf

[5] S. Weinberg : *Gravitation and Cosmology*
(J. Wiley, New York, 1972)

[6] Gerold Gründler : *Grundlagen der Relativistischen Quantenfeldtheorie* (APIN, Nürnberg, 2012)
http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/Feldtheorie.pdf

[7] C. Møller : *Conservation Laws and Absolute Parallelism in General Relativity* ,
Mat.-fys. Skrift. K. D. V. Sels. **1**, no.10, 50pp. (1961)

[8] A. Einstein : *Hamiltonsches Prinzip und die allgemeine Relativitätstheorie* ,
Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. **42**, 1111-1116 (1916)
http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?url=/permanent/echo/einstein/sitzungsberichte/K7NY6YMW/index.meta