Elektromagnetische Einheiten

In der Elektrodynamik werden verschiedene Einheitensysteme verwendet, in denen Größen wie Ladungen oder Feldstärken nicht nur unterschiedliche Zahlenwerte sondern auch unterschiedliche Dimensionen erhalten. In diesem Artikel wird beschrieben, wie man die Formeln der Elektrodynamik in übersichtlicher Weise zwischen den verschiedenen Einheitensystemen umrechnen kann.

Zufolge der Definition des Meters ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

$$c \equiv 2.997\,924\,58 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \ . \tag{1}$$

Zusätzlich werden wir gleich fünf weitere Konstanten definieren, die wir $\mu_0, \epsilon_0, e, b, r$ nennen. μ_0 ist die magnetische Feldkonstante des Vakuums, und ϵ_0 ist die elektrische Feldkonstante des Vakuums. Die Namen e, b, r sollen an die elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$, die magnetische Feldstärke $\boldsymbol{B}$ (manchmal magnetische Induktion genannt), und an die elektrische Ladungsdichte ρ erinnern. Die fünf Konstanten werden in verschiedenen Einheitensystemen unterschiedlich definiert, und zwar nicht nur mit unterschiedlichen Zahlenwerten sondern auch mit unterschiedlichen physikalischen Dimensionen. Das macht Umrechnungen wesentlich unübersichtlicher als beispielsweise die Umrechnung von „pounds per square inch“ in „Newton pro Quadratmeter“. Hier haben beide Angaben die Dimension „Druck“; nur der Zahlenwert ist unterschiedlich. Das ist bei den verschiedenen Definitionen von $\mu_0, \epsilon_0, e, b, r$ anders.

Außerhalb makroskopisch beschriebener Materie (Polarisation = Magnetisierung = 0) lauten die Maxwell'schen Gleichungen mit diesen Konstanten in jedem beliebigen Einheitensystem:

$$e\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = r\,4\pi\,\rho \tag{2a}$$

$$e\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{b}{c}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{2c}$$

$$b\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \frac{e}{c}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{E}}{\mathrm{d}t} + r\,\frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{J} \tag{2d}$$

$\boldsymbol{J}$ ist die elektrische Stromdichte. Da die Maxwellgleichungen relativistisch invariant sind, wurde die Zeitkoordinate als ct geschrieben. $\boldsymbol{J}$ erhielt den allgemeinen Multiplikator r, weil $\boldsymbol{J}$ und ρ sich nur durch mechanische Einheiten voneinander unterscheiden.

Mithilfe der makroskopischen elektrischen Polarisation $\boldsymbol{P}$ und der makroskopischen Magnetisierung $\boldsymbol{M}$ definiert man die dielektrische Verschiebung $\boldsymbol{D}$ und das magnetisierende Feld $\boldsymbol{H}$ (oft auch magnetisches Feld genannt) in jedem beliebigen Einheitensystem durch

$$\frac{e}{\epsilon_0}\,\boldsymbol{D} \equiv e\,\boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{e}\,\boldsymbol{P} \tag{3a}$$

$$\mu_0 b\boldsymbol{H} \equiv b\,\boldsymbol{B} - \frac{4\pi}{b}\,\boldsymbol{M}\ . \tag{3b}$$

Die Maxwell'schen Gleichungen in makroskopisch beschriebener Materie lauten für beliebige Einheitensysteme

$$\frac{e}{\epsilon_0}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = r\,4\pi\,\rho \tag{4a}$$

$$e\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{b}{c}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \tag{4b}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{4c}$$

$$\mu_0 b\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} = \frac{e}{\epsilon_0 c}\,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t} + r\,\frac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{J}\ . \tag{4d}$$

Außerhalb makroskopisch beschriebener Materie ($\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} = 0$) gehen diese Gleichungen in die Gleichungen (2) über. („Außerhalb makroskopisch beschriebener Materie“ bedeutet nicht „im Vakuum“. Als Vakuum betrachtet man vielmehr ein System, das durch $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{M} = \rho = \boldsymbol{J} = 0$ gekennzeichnet ist.)

Alle bisherigen Gleichungen gelten für beliebige Einheitensysteme. In den fünf in der Elektrodynamik am häufigsten verwendeten Einheitensystemen werden die fünf Konstanten $\mu_0, \epsilon_0, e, b, r$ folgendermaßen definiert:

$$\begin{array}{lcccc}
\text{System} & \mu_0 & \epsilon_0 & b & e \equiv \dfrac{1}{r} \\[2ex]
\text{MKSA} & 4\pi \cdot 10^{-7}\,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} & \dfrac{1}{\mu_0 c^2} & \sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0}} & \sqrt{\dfrac{4\pi}{\mu_0 c^2}} \\[2ex]
\begin{array}{l}\text{Heaviside-}\\ \text{-Lorentz}\end{array} & 1 & 1 & \sqrt{4\pi} & \sqrt{4\pi} \\[2ex]
\text{Gauß} & 1 & 1 & 1 & 1 \\[2ex]
\text{ESU} & \dfrac{1}{c^2} & 1 & c & 1 \\[2ex]
\text{EMU} & 1 & \dfrac{1}{c^2} & 1 & \dfrac{1}{c}
\end{array} \tag{5}$$

Das MKSA-System und das System von Heaviside und Lorentz werden oft als rationalisierte Systeme bezeichnet, weil der irrationale Faktor 4π durch die Konstanten aus den Maxwell’schen Gleichungen gekürzt wird. Dafür tauchen aber in diesen Systemen an anderen Stellen Faktoren 4π auf, wo sie in den drei anderen Systemen fehlen. Insofern ist es ziemlich willkürlich, welche Systeme man als rationalisiert oder nicht rationalisiert betrachtet. Physikalisch bedeutsam ist dagegen, dass das MKSA-System als einziges der in (5) aufgelisteten fünf Einheitensysteme eine spezielle Einheit (nämlich das Ampere) für die Beschreibung der elektromagnetischen Phänomene definiert. Alle anderen Systeme stammen aus der Zeit als viele Physiker noch glaubten dass es eines Tages gelingen könnte, die Elektrodynamik in die Newton'sche Mechanik einzubetten. Das MKSA-System hat außerdem den Vorteil, dass eine Fehlerquelle in der Zusammenarbeit mit Ingenieuren (die ausschließlich das MKSA-System verwenden, das auch als SI = Systeme Internationale bezeichnet wird) von vornherein vermieden wird. Ein bemerkenswerter Vorteil des Systems von Heaviside und Lorentz sowie des Systems von Gauß besteht darin, dass elektrisches und magnetisches Feld, die ja die sechs unabhängigen Komponenten des schiefsymmetrischen relativistischen Feldstärketensors bilden, sinnvollerweise die gleichen Einheiten bekommen. Auf keinen Fall kann man eines der in (5) aufgelisteten fünf Systeme als „falsch“ bezeichnen. Und man tut sicherlich niemandem Unrecht, wenn man die Behauptung einiger Lehrbuchautoren, dass ausschließlich mit dem jeweils von ihnen verwendeten Einheitensystem ein Verständnis der Elektrodynamik möglich sei, als blanken Unsinn abtut.

Mithilfe der Konstanten von Tabelle (5) kann man Formeln der Elektrodynamik auf relativ einfache Weise aus einem Einheitensystem in ein anderes übertragen. Beispiel: Man möchte die Formel für die Lorentzkraft

$$\boldsymbol{F} = q_{\text{Gauß}}\Big(\boldsymbol{E}_{\text{Gauß}} + \frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_{\text{Gauß}}\Big)\ , \tag{6a}$$

die auf eine Ladung q wirkt welche sich mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ bewegt, vom Gauß'schen System ins MKSA-System übertragen. Weil die Ladung q sich nur durch mechanische Einheiten (nämlich ein Integral über den Ortsraum) von der Ladungsdichte ρ unterscheidet, ist r der allgemeine Multiplikator von q. Der allgemeine Multiplikator von $\boldsymbol{E}$ ist e. Weil laut (5) $e \equiv 1/r$ gilt, hat das Produkt $q\boldsymbol{E}$ in allen Einheitensystemen die gleiche Form. Insgesamt gilt

$$\boldsymbol{F} = q_{\text{MKSA}}\Big(\boldsymbol{E}_{\text{MKSA}} + \frac{1}{c}\,\frac{r_{\text{MKSA}}b_{\text{MKSA}}}{r_{\text{Gauß}}b_{\text{Gauß}}}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_{\text{MKSA}}\Big)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= q_{\mathrm{MKSA}} \Big(\boldsymbol{E}_{\mathrm{MKSA}} + \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \frac{4\pi}{\mu_0}} \, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{MKSA}} \Big) \\ &= q_{\mathrm{MKSA}} \Big(\boldsymbol{E}_{\mathrm{MKSA}} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{MKSA}} \Big) \ . \end{aligned} \tag{6b}$$

So wie wir beim Beispiel der Lorentzkraft durch eine einfache Überlegung den verallgemeinerten Multiplikator der Ladung q feststellen konnten, findet man in entsprechender Weise auch für andere Größen die jeweils gültigen Multiplikatoren. Einige wichtige Beispiele sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Variable	allgemeiner Multiplikator	
elektrische Feldstärke $\boldsymbol{E}$, Spannung U, skalares Potential Φ	e	
Verschiebung $\boldsymbol{D}$	$\dfrac{e}{\epsilon_0}$	
Polarisation $\boldsymbol{P}$	$\dfrac{4\pi}{e}$	
magnetische Feldstärke (Induktion) $\boldsymbol{B}$, Vektorpotential $\boldsymbol{A}$	b	(7)
magnetisierendes Feld $\boldsymbol{H}$	$\mu_0 b$	
Magnetisierung $\boldsymbol{M}$	$\dfrac{4\pi}{b}$	
Ladungsdichte ρ, Ladung q, Strom I, Stromdichte $\boldsymbol{J}$	$\dfrac{1}{e}$	
Widerstand R, Induktivität L	$\dfrac{e}{r} = e^2$	
Kapazität C, Leitfähigkeit σ	$\dfrac{1}{e^2}$	