

# Zeitdilatation beschleunigter Uhren

Die Definitionen von Eigenzeit und Eigenlänge in der Allgemeinen Relativitätstheorie werden beschrieben. Für das Beispiel von Uhren und Maßstäben, die in einem rotierenden Bezugssystem ruhen, also gegenüber Inertialsystemen beschleunigt sind, werden die Zeitdilatation und die Längenkontraktion explizit berechnet. Experimentelle Tests dieser Zeitdilatation werden diskutiert, insbesondere die Untersuchung der Zerfallszeit beschleunigter Myonen. Zur Illustration des Äquivalenzprinzips wird gezeigt, dass die allgemein-relativistische Bewegungsgleichung von Objekten, die in einem rotierenden Bezugssystem in Ruhe sind, sich auf Newtons Bewegungsgleichung der gleichen Objekte reduziert, die in einem Inertialsystem ruhen und einem Gravitationsfeld ausgesetzt sind. Der Artikel schließt mit einigen Anmerkungen zum Unterschied zwischen realen und idealen Uhren, und der „Uhren-Hypothese“.

## 1. Koordinaten-Diffeomorphismen

In der flachen Minkowski-Raum-Zeit bepflastern wir den dreidimensionalen Ortsraum mit einem dreidimensionalen rechtwinkligen Gitter von Bezugsmarken, und ordnen jeder Marke kartesische Koordinaten  $x^1, x^2, x^3$  zu. Die Werte der  $x^i$  sind für jede Marke konstant, d. h. die Marken sind in dem Koordinatensystem, das sie definieren, in Ruhe.

Jetzt dehnen und/oder komprimieren und/oder verdrehen und/oder rotieren wir das Gitter der Marken lokal und/oder global, und/oder benennen die Marken um, wechseln z. B. von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten oder irgendwelchen anderen Koordinaten. Alle Bewegungen und Umbenennungen der Marken unterliegen der einschränkenden Bedingung, dass die Abbildung

des anfänglichen Gitters auf das deformierte und/oder umbenannte Gitter differenzierbar und umkehrbar (d. h. bijektiv) sein muss, und dass die inverse Abbildung ebenfalls differenzierbar sein muss. Wenn die Verschiebungen und Umbenennungen der Marken diesen Bedingungen entsprechen, dann wird die Abbildung vom ursprünglichen auf das geänderte Koordinatensystem als *Diffeomorphismus* bezeichnet. Die Bedingung, dass die Abbildungen invertierbar und differenzierbar sein müssen, garantiert dass das neue Koordinatengitter „glatt“ und frei von Singularitäten ist.

Wir lassen auch zeitabhängige Diffeomorphismen zu. Solche zeitabhängigen Diffeomorphismen werden durch die Zeit  $t$  parametrisiert, die eine Uhr anzeigt welche sich im ursprünglichen kartesischen Koordinatensystem mit flacher Minkowski-Metrik, auf dem der Diffeomorphismus definiert wird, in Ruhe befindet.

## 2. Eigen-Zeit und Eigen-Länge

An allen Bezugsmarken werden Standarduhren befestigt, die per Definition die *Eigenzeit*  $\tau$  an diesen Raumpunkten anzeigen. In Abschnitt 6 werden wir spezifizieren, was eine Uhr zur *Standarduhr* qualifiziert.

Im ursprünglichen flachen Minkowski-Raum ist die Eigenzeit aller Bezugsmarken identisch, und gleich der *Koordinatenzeit*  $t \equiv x^0/c$  des inertialen kartesischen Koordinatensystems, wobei  $c$  die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum ist. Nach dem Diffeomorphismus wird das Tempo, mit dem die Eigenzeit vergeht, durch die beiden unten angegebenen Bedingungen (2) und (4) bestimmt. Die Eigenzeit wird auch weiterhin an jedem beliebigen Punkt im Raum von den Standarduhren angezeigt, die an den Bezugsmarken befestigt sind. Sie kann aber nun an verschiedenen Punkten im Raum unterschiedlich sein. Und die Eigenzeit  $\tau$  kann von der Koordinatenzeit  $t \equiv x^0/c$  abweichen. Außerdem können die Koordi-

natenzeiten unterschiedlicher Koordinatensysteme unterschiedlich schnell vergehen. Der Zusammenhang zwischen Koordinatenzeit  $t$  und Eigenzeit  $\tau$  wird gleich in (3) klargestellt.  $c$  wird als Naturkonstante betrachtet, die zu jeder Zeit und überall im Raum den gleichen Wert hat.

Wir legen fest, dass im Folgenden griechische Raum-Zeit Indizes  $\mu, \nu, \rho, \dots$  automatisch über 0, 1, 2, 3 zu summieren sind, wenn sie in einem Produkt doppelt vorkommen. Lateinische Raumindizes  $i, j, k, \dots$  sind automatisch über 1, 2, 3 zu summieren, wenn sie in einem Produkt doppelt vorkommen.

Vor dem Diffeomorphismus (d. h. im flachen Minkowski-Raum) ist die Metrik an jeder Bezugsmarke

$$(g_{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diagonal}(1, -1, -1, -1) . \quad (1)$$

Nach dem Diffeomorphismus wird die Metrik  $g_{\mu\nu}(x)$  in der Weise definiert, dass für das Linienelement gilt:

$$\underbrace{ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}_{\text{nach Diffeomorphismus}} = \underbrace{ds^2}_{\text{vor Diffeomorphismus}} \quad \text{gilt an jeder Bezugsmarke.} \quad (2)$$

$ds$  ist das (unter Diffeomorphismen invariante) Differential einer vierdimensionalen Länge in der Raum-Zeit. Eine Standard-Uhr, deren räumliche Koordinaten konstant sind (d. h. die an einem Punkt des Raumes in Ruhe ist), zeigt per Definition die Eigenzeit an diesem Punkt des Raumes an. Ihr Linienelement ist

$$\begin{aligned} &\text{falls } dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0 : \\ &ds^2 \stackrel{(2)}{=} g_{00}(dx^0)^2 \equiv g_{00}c^2 dt^2 = c^2 d\tau^2 . \end{aligned} \quad (3a)$$

In einem anderen Koordinatensystem, in dem sich die gleiche Uhr bewegt, wird die Relation zwischen der Eigenzeit  $\tau$  der bewegten

Uhr (d. h. der Zeit, die diese Uhr anzeigt,) und der Koordinatenzeit  $t$  zu

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 \stackrel{(2)}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \\ &= g_{00}c^2 dt^2 + 2g_{0i}c dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j . \end{aligned} \quad (3b)$$

Die Metrik wird durch (2) nicht eindeutig festgelegt. Als weitere Randbedingung (durch welche die Metrik immer noch nicht eindeutig festgelegt wird) verlangen wir, dass das Linienelement eines Lichtsignals im Vakuum Null ist:

$$\begin{aligned} \text{Lichtsignal : } ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \\ &= g_{00}c^2 dt^2 + 2g_{0i}c dt dx^i + g_{ij} dx^i dx^j = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Folglich gilt  $d\tau \stackrel{(3b)}{=} 0$  für eine Uhr, die sich mit der Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum bewegt. Das ist allerdings ein rein theoretisches Resultat, da keine Uhr auf diese Geschwindigkeit beschleunigt werden kann.

In Anlehnung an Cook [1] definieren wir das Differential  $d\ell$  der Eigenlänge mithilfe des Differentials der Eigenzeit und der Konstanten  $c$ :

$$d\ell \equiv c d\tau \quad (5a)$$

Um  $d\ell$  bei einer Bezugsmarke  $F$  praktisch zu implementieren, wird in beliebiger Richtung von  $F$  ein Spiegel  $M$  aufgestellt. Dann lassen wir ein Lichtsignal von  $F$  nach  $M$  und zurück nach  $F$  laufen. Der Spiegel wird so lange verschoben, bis die Zeit zwischen Emission und Absorption des Lichtsignals beim Punkt  $F$ , gemessen mit der bei  $F$  befestigten Standard-Uhr, gleich

$$2 d\tau = \frac{2 \times (\text{Abstand } FM)}{c} = \frac{2 d\ell}{c} \quad (5b)$$

ist. Durch (5) wird  $d\ell$  mithilfe eines Lichtsignals bestimmt, dessen invariantes Raum-Zeit Linienelement Null ist:

$$\text{Lichtsignal: } ds^2 \stackrel{(2)}{=} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \stackrel{(4)}{=} 0 \stackrel{(5)}{=} c^2 d\tau^2 - d\ell^2 \quad (6)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für  $dt = dx^0/c$ , siehe (4). Sie hat die Lösungen

$$dx^0 = -\frac{g_{0i}}{g_{00}} dx^i \pm \sqrt{\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}^2} dx^i dx^j - \frac{g_{ij}}{g_{00}} dx^i dx^j}. \quad (7)$$

Wenn man diesen Ausdruck in (5b) einsetzt, erhält man für den Hinweg des Signals von  $F$  nach  $M$  und für den Rückweg des reflektierten Signals von  $M$  nach  $F$  den gleichen Ausdruck, aber die Vorzeichen der  $dx^i$  wechseln. Also ist die gesamte Laufzeit des Signals von  $F$  nach  $M$  und zurück nach  $F$ , gemessen mit der bei  $F$  befestigten Standarduhr, gleich

$2d\tau = \text{totale Laufzeit des Lichtsignals} =$

$$\stackrel{(3a)}{=} \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} (dx_{FM}^0 + dx_{MF}^0) \stackrel{(7)}{=} +\frac{2}{c} \sqrt{\left(\frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} - g_{ij}\right) dx^i dx^j}. \quad (8)$$

Wir haben uns für die positive Wurzel entschieden, aus dem physikalischen Grund dass  $d\tau \geq 0$  sein soll. Man beachte dass wir andere Vorzeichen als Cook [1] erhalten, weil Cook die Minkowski-Metrik mit Triple-Plus Konvention verwendet, wir aber die Triple-Minus Konvention anwenden. Dadurch erhalten wir vernünftigerweise im Fall von Minkowski-Metrik  $d\tau \in \mathbb{R}$ .

Durch Einsetzen von (8) in (6) erhält man das Differential

$$\boxed{d\ell = \sqrt{-\left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right) dx^i dx^j}} \quad (9a)$$

der Eigenlänge. (8) ist lediglich die Laufzeit des Lichtsignals. Der allgemeine Ausdruck für das Differential der Eigenzeit ist

$$\begin{aligned}
 d\tau &\stackrel{(3b)}{=} \sqrt{g_{00} dt^2 + \frac{2g_{0i}}{c} dt dx^i + \frac{g_{ij}}{c^2} dx^i dx^j} \\
 &\stackrel{(3a)}{=} \sqrt{g_{00}} dt \quad \text{falls } dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{9b}$$

Diese Formeln für die Eigenlänge und die Eigenzeit gelten in beliebigen Koordinatensystemen mit beliebig gekrümmter Raum-Zeit, vorausgesetzt dass die Abbildung von den kartesischen Koordinaten in der flachen Minkowski-Raum-Zeit auf die neuen Koordinaten in beliebig gekrümmter Raum-Zeit ein Diffeomorphismus ist.

Wenn sich zwei Ereignisse  $A$  und  $B$  auf der Weltlinie der gleichen Uhr ereignen, dann ist das Intervall  $\tau(B) - \tau(A)$  der Eigenzeit, gemessen mit dieser Uhr, gleich

$$\tau(B) - \tau(A) = \int_{\text{Weg } AB} d\tau .
 \tag{10}$$

Das Wegintegral ist entlang der Weltlinie der Uhr zu berechnen, mit  $d\tau$  entsprechend (9b). Man beachte, dass das Intervall der Eigenzeit vom Weg der Uhr abhängig ist. Beide Ereignisse  $A$  und  $B$  könnten auch auf der Weltlinie einer anderen Uhr liegen, und die Weltlinien der beiden Uhren zwischen den Ereignissen könnten unterschiedlich sein. Dann wäre das Intervall  $\tau(B) - \tau(A)$  der Eigenzeit dieser beiden Uhren möglicherweise verschieden. (Man erinnere sich an das wohlbekannte „Zwillingsparadox“.)

Das Intervall der Eigenlänge zwischen zwei Raumpunkten  $F$  und  $M$  ist gegeben durch das Wegintegral

$$\ell_{FM} = \frac{1}{2} \left( \int_{\text{Weg } FM} d\ell + \int_{\text{Weg } MF} d\ell \right) = \int_{\text{Weg } FM} d\ell
 \tag{11}$$

entlang der Weltlinie eines Lichtsignals, das von  $F$  nach  $G$  gesendet und nach  $F$  zurückgespiegelt wird, mit  $d\ell$  entsprechend

(9a). Man beachte dass in der Definition (5) angenommen wird, dass das gespiegelte Lichtsignal auf seinem Weg zurück von  $M$  nach  $F$  an jedem Punkt des Weges die gleiche unveränderte lokale Metrik  $g_{\mu\nu}(x)$  vorfindet, die an dieser Stelle auch schon auf dem Hinweg des Signals von  $F$  nach  $M$  bestand. Deshalb konnten die beiden Linienintegrale in (11) zu einem zusammengefasst werden. Aus dem gleichen Grund ist der Begriff „Eigenlänge“ auf solche Raumintervalle beschränkt, in denen sich die Metrik während des Hin- und Rückwegs des Lichtsignals nicht merklich verändert. Für den Begriff „Eigenzeit“ gibt es keine derartige Beschränkung.

Man beachte außerdem, dass der Begriff Eigenlänge mehrdeutig ist, falls mehrere verschiedene mögliche Wege für das Lichtsignal bestehen, beispielsweise wenn es zwischen  $F$  und  $M$  „Gravitationslinsen“ gibt. In dem Fall ist der Begriff „Intervall der Eigenlänge zwischen  $F$  und  $M$ “ nur definiert, wenn man die Weltlinie des Lichtsignals zwischen  $F$  und  $M$  spezifiziert, genau so wie der Begriff „Intervall der Eigenzeit zwischen  $A$  und  $B$ “ nur dann definiert ist, wenn die Weltlinie der Uhr spezifiziert wird, die sich von  $A$  nach  $B$  bewegt.

### 3. Ein rotierendes Bezugssystem

Als Anwendung von (9) definieren wir im flachen Minkowski-Raum ein Inertialsystem mit Zylinderkoordinaten  $(ct_I, \rho_I, \theta_I, z_I)$ . Außerdem definieren wir ein rotierendes Bezugssystem (also kein Inertialsystem) mit den Zylinderkoordinaten  $(ct_R, \rho_R, \theta_R, z_R)$  in der Weise, dass

$$\begin{aligned}
 t &\equiv t_I = t_R \\
 \rho &\equiv \rho_I = \rho_R \\
 \theta_I &= \theta_R + \omega t \\
 z &\equiv z_I = z_R
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

gilt. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Bezugssystemen ist also, dass die Achse  $\theta_R = 0$  gegenüber der Achse  $\theta_I = 0$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der Ebene  $z = 0$  rotiert. Das invariante Linienelement wird in diesen beiden Bezugssystemen zu

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\theta_I^2 - dz^2 \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} &= c^2 dt^2 - d\rho^2 - (\rho^2 d\theta_R^2 + 2\rho\omega dt \rho d\theta_R + \rho^2\omega^2 dt^2) - dz^2 \\ &= \left(1 - \frac{\rho^2\omega^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{2\rho\omega}{c} c dt \rho d\theta_R - \\ &\quad - d\rho^2 - \rho^2 d\theta_R^2 - dz^2 . \end{aligned} \quad (13b)$$

Die von Null verschiedenen Elemente der Metrischen Tensoren sind

$$g_{I00} = 1 , \quad g_{I11} = -1 , \quad g_{I22} = -1 , \quad g_{I33} = -1 \quad (14a)$$

$$\begin{aligned} g_{R00} &= 1 - \rho^2\omega^2/c^2 , \quad g_{R11} = -1 , \quad g_{R22} = -1 , \\ g_{R33} &= -1 , \quad g_{R02} = g_{R20} = -\rho\omega/c . \end{aligned} \quad (14b)$$

Wir haben darauf geachtet, dass alle Komponenten des Metrischen Tensors dimensionslos sind. Deshalb haben wir  $\rho d\theta$ , aber nicht  $d\theta$ , als eine Komponente von  $ds$  mit der korrekten Dimension [Länge] identifiziert.

Die Metrik ( $g_{I\mu\nu}$ ) des inertialen Koordinatensystems heißt „Zeit-orthogonal“, weil alle  $g_{I0i}$  Null sind. Die Metrik ( $g_{R\mu\nu}$ ) des nicht-inertialen rotierenden Systems heißt „nicht Zeit-orthogonal“ oder „asynchron“, weil einige  $g_{R0i} \neq 0$  sind. In einem Zeit-orthogonalen System kann eine globale Zeit definiert werden, und man kann für zwei beliebige Ereignisse eindeutig feststellen ob sie gleichzeitig geschehen, oder nicht. Unterschiedliche Zeit-orthogonale Systeme werden allerdings im Allgemeinen die Frage der Gleichzeitigkeit der gleichen beiden Ereignisse unterschiedlich beantworten. Dagegen kann in einem asynchronen System die Frage der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse, die an unterschiedlichen Orten geschehen, nicht

eindeutig beantwortet werden (nicht einmal im Rahmen dieses einzelnen Koordinatensystems!), weil es unmöglich ist, in derartigen Systemen eine globale Zeit eindeutig zu definieren.

Durch Einsetzen von (14) in (9a) und (9b) erhält man

$$d\ell_I \stackrel{(9a)}{=} \left[ d\rho^2 + \rho^2 d\theta_I^2 + dz^2 \right]^{1/2} \quad (15a)$$

$$d\ell_R \stackrel{(9a)}{=} \left[ d\rho^2 + \left(1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}\right)^{-1} \rho^2 d\theta_R^2 + dz^2 \right]^{1/2} \quad (15b)$$

$$d\tau_I \stackrel{(9b)}{=} \left[ dt^2 - \frac{1}{c^2} d\rho^2 - \frac{\rho^2}{c^2} d\theta^2 - \frac{1}{c^2} dz^2 \right]^{1/2} \quad (15c)$$

$$d\tau_R \stackrel{(9b)}{=} \left[ \left(1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}\right) dt^2 - \frac{2\rho^2 \omega}{c^2} dt d\theta_R^2 - \frac{1}{c^2} d\rho^2 - \frac{\rho^2}{c^2} d\theta_R^2 - \frac{1}{c^2} dz^2 \right]^{1/2}. \quad (15d)$$

Falls nur Längen mit konstantem  $\rho$  und konstantem  $z$  gemessen werden, und falls die Uhren in den jeweiligen Koordinatensystemen in Ruhe sind, vereinfacht sich dies Ergebnis zu

$$d\ell_I \stackrel{(15a)}{=} \rho d\theta_I \quad \text{falls } d\rho = dz = 0 \quad (15e)$$

$$d\ell_R \stackrel{(15b)}{=} \left(1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}\right)^{-1/2} \rho d\theta_R \quad \text{falls } d\rho = dz = 0 \quad (15f)$$

$$d\tau_I \stackrel{(15c)}{=} dt \quad \text{falls } d\rho = d\theta_I = dz = 0 \quad (15g)$$

$$d\tau_R \stackrel{(15d)}{=} \left[1 - \rho^2 \omega^2 / c^2\right]^{1/2} dt \quad \text{falls } d\rho = d\theta_R = dz = 0. \quad (15h)$$

In (15f) und (15h) erkennt man die wohlbekannten Phänomene der Kontraktion eines bewegten Maßstabs und die Dilatation einer bewegten Uhr. Da  $\rho\omega = v$  gerade die (ortsabhängige!) relative Geschwindigkeit  $v$  der beiden Koordinatensysteme ist, werden die

Zeitdilatation und die Längenkontraktion durch den Lorentzfaktor

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \quad (16)$$

bestimmt.

Eine Uhr, die im rotierenden Koordinatensystem in Ruhe ist, wird im Inertialsystem mit

$$a = v^2/\rho = \rho\omega^2 \quad (17)$$

beschleunigt, und ihre Geschwindigkeit ist im Inertialsystem  $v = \rho\omega$ . Man beachte die bemerkenswerte Tatsache, dass die Zeitdilatation (15h) und die Längenkontraktion (15f) genau die gleichen Werte haben würden, wenn das zweite Koordinatensystem nicht rotieren würde, sondern ein zweites Inertialsystem wäre, das sich linear mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zum ersten Inertialsystem bewegt. Dies Ergebnis ist eine Folge unserer Annahme, dass die Zeit mit „Standarduhren“ gemessen wird, die unten in Abschnitt 6 spezifiziert werden.

## 4. Das Äquivalenzprinzip

In einem hinreichend kleinen Labor kann man (ohne aus dem Fenster zu schauen) unmöglich herausfinden, ob ein im Labor beobachtetes Gravitationsfeld durch eine Massekonzentration außerhalb des Labors erzeugt wird, oder durch mechanische Beschleunigung des Labors in einer Gegend des Weltraums ohne merkliche Gravitation, egal welche Art von Messung oder physikalischem Experiment man durchführt.

Einsteins Äquivalenzprinzip [2]:

Alle Naturgesetze sind identisch in einem inertialen Bezugssystem in einem homogenen Gravitationsfeld mit der gravitativen Beschleunigung  $\mathbf{g}$ , und in einem Bezugssystem, das in einem Raumbereich ohne merkliche Gravitation mechanisch mit  $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$  beschleunigt wird. (18)

Man beachte: Das Äquivalenzprinzip besagt, dass die Metrik (14b) des rotierenden Bezugssystem, die durch die Beschleunigung  $\rho\omega^2 = v^2/\rho$  in einem Raumbereich ohne signifikante Gravitation erzeugt wird (mittlere Skizze in Abb. 1), *genau so gut* als gravitativer Effekt in einem inertialen Bezugssystem erklärt werden könnte (linke Skizze in Abb. 1). Es besagt aber *nicht*, dass es eine *zusätzliche* Modifikation dieser Metrik durch einen äquivalenten gravitativen Effekt gibt.

Wir wollen uns jetzt davon überzeugen, dass sich die Bewegungs-

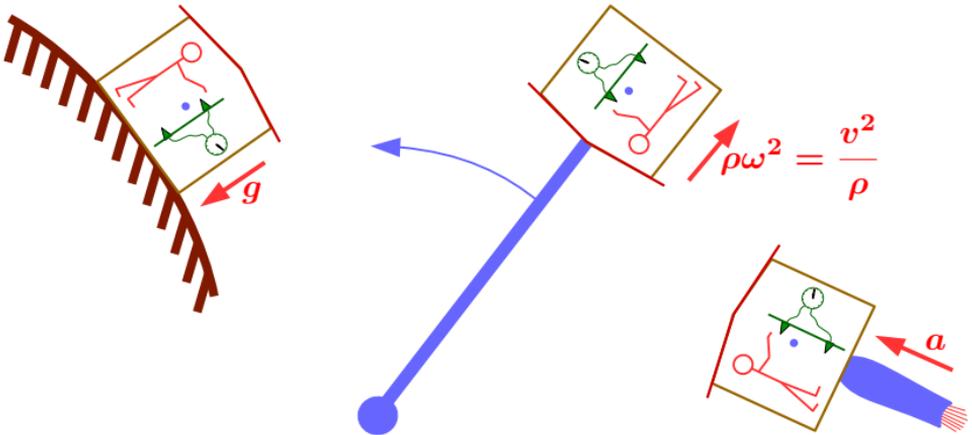


Abb. 1: Einsteins Äquivalenzprinzip: Wenn die Beschleunigungen  $g = \rho\omega^2 = a$  gleich sind, dann erhalten die drei Physiker genau die gleichen Resultate für den freien Fall, und für jedes beliebige andere physikalische Experiment, das sie in ihren kleinen Laboratorien durchführen.

gleichung der ART

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} &= -\Gamma_{\mu\nu}^\kappa \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ \Gamma_{\mu\nu}^\kappa &\equiv \frac{g^{\kappa\sigma}}{2} \left( \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\sigma} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

eines kleinen massiven Objekts, d. h. eines Objekts das die Raum-Zeit-Metrik an seiner Position  $x$  nicht wesentlich beeinflusst, tatsächlich auf Newtons Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (20)$$

desselben kleinen Objektes in einem Inertialsystem reduziert, wenn die gekrümmte Metrik  $g_{\mu\nu}(\mathbf{x})$  von (19) durch das äquivalente Gravitationsfeld mit Potential  $\Phi(\mathbf{x})$  in einem flachen Raum mit Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  ersetzt wird. Dabei folgen wir in etwa der Darstellung von Fließbach [3, Kap. 11].

Einfachheitshalber nehmen wir ein statisches Gravitationsfeld an:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^0} = 0 \quad (21)$$

Mit dieser Annahme vereinfacht sich die allgemein relativistische Bewegungsgleichung (19) zu

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^\kappa}{d\tau^2} &\stackrel{(19)}{=} +\frac{g^{\kappa j}}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} - \\ &- \left( g^{\kappa 0} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} + g^{\kappa j} \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - g^{\kappa j} \frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} \right) \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} - \\ &- \frac{g^{\kappa\sigma}}{2} \left( \frac{\partial g_{j\sigma}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\sigma}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} . \end{aligned} \quad (22)$$

Newtons Theorie ist im Fall schwacher Gravitationsfelder eine gute Näherung. Also nehmen wir an, dass im Fall schwacher Felder die Metrik ( $g_{\mu\nu}$ ) nur wenig von der Minkowski-Metrik ( $\eta_{\mu\nu}$ ) abweicht:

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad , \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (23)$$

Außerdem benutzen wir Bezugssysteme, in denen die Geschwindigkeit des Testobjekts gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sehr klein ist:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} \approx c \quad \text{falls } v \ll c \quad (24)$$

Deshalb können wir alle kleinen Terme

$$\mathcal{O}\left(\frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}\right) \quad , \quad \mathcal{O}\left(\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^k} \frac{dx^i}{d\tau}\right) \quad , \quad \mathcal{O}\left(h_{\rho\sigma} \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^k}\right) \quad (25)$$

vernachlässigen, und erhalten in dieser Näherung die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \stackrel{(22)}{\approx} 0 \quad (26a)$$

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \stackrel{(22)}{\approx} -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \approx -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \quad (26b)$$

Aus dieser Gleichung schließen wir

$$\frac{dt}{d\tau} \approx \text{konstant} = 1 \quad (27a)$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\frac{c^2}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} \stackrel{(20)}{=} -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \quad (27b)$$

Auf diese Weise ergibt sich Newtons Resultat mit

$$g_{00}(\mathbf{x}) \stackrel{(23)}{=} \eta_{00} + h_{00}(\mathbf{x}) \stackrel{(27)}{=} 1 + \frac{2\Phi(\mathbf{x})}{c^2} \quad \text{falls } \frac{|2\Phi|}{c^2} \ll 1 \quad (28)$$

Im Fall des rotierenden Bezugssystems ohne Gravitationsfeld gilt

$$g_{00}(\mathbf{x}) \stackrel{(14b)}{=} 1 - \rho^2 \omega^2 / c^2 . \quad (29)$$

Also sind die beiden Systeme tatsächlich äquivalent, wie vom Äquivalenzprinzip behauptet, falls

$$-\Phi(\mathbf{x}) \equiv -\Phi(\rho) = +\frac{\rho^2 \omega^2}{2} = +\frac{v^2}{2} \ll c^2 . \quad (30)$$

Die Zeitdilatation einer Uhr, die im rotierenden System ohne Gravitationsfeld ruht, ist

$$d\tau_R \stackrel{(9b)}{=} \sqrt{g_{00}} dt \stackrel{(29)}{=} \sqrt{1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt . \quad (31)$$

Folglich ist das Differential der Eigenzeit, gemessen mit einer Uhr, die in einem Inertialsystem mit dem äquivalenten Gravitationsfeld ruht, gleich

$$d\tau \stackrel{(9b)}{=} \sqrt{g_{00}} dt \stackrel{(28)}{=} \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} dt \quad (32)$$

$$\text{falls } dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0 \text{ und } \frac{|2\Phi|}{c^2} \ll 1 .$$

Wegen  $\Phi \leq 0$  geht eine Uhr im Gravitationsfeld langsamer als im gravitationsfreien Raum.

An der Oberfläche typischer Himmelskörper hat  $|2\Phi|/c^2$  folgende Werte:

$$\frac{|2\Phi|}{c^2} \approx \left\{ \begin{array}{ll} 1.4 \cdot 10^{-9} & \text{Erde} \\ 4 \cdot 10^{-6} & \text{Sonne} \\ 3 \cdot 10^{-4} & \text{Weißer Zwerg} \\ 3 \cdot 10^{-1} & \text{Neutronenstern} \end{array} \right. \quad (33)$$

Demnach ist (28) in unserem Sonnensystem eine ausgezeichnete Näherung, eine ziemlich gute Näherung an der Oberfläche Weißer Zerge, und immer noch eine nützliche grobe Näherung an der Oberfläche von Neutronensternen. (28) ist jedoch natürlich völlig ungeeignet zur Beschreibung Schwarzer Löcher.

## 5. Experimentelle Ergebnisse

Man kann die Zerfallsrate von Myonen als Uhr betrachten. Tatsächlich wurde die Beobachtung der gegenüber ruhenden Myonen signifikant verlängerten Lebensdauer von Myonen mit hoher linearer Geschwindigkeit [4] als experimentelle Bestätigung des Effekts der speziell-relativistischen Zeitdilatation interpretiert.

Die Zerfallsrate von Myonen wurde auch genutzt, um experimentell die Zeitdilatation von Uhren zu überprüfen, die in einem beschleunigten Bezugssystem ruhen: In den Myon-Speicherringen am CERN [5] und in Brookhaven [6] wurden Myonen mit der

$$\text{Energie} = 3.1 \text{ GeV} \tag{34a}$$

in Ringen mit 14 m Durchmesser gespeichert. Im System der Laborkoordinaten, das in guter Näherung als Inertialsystem betrachtet werden kann, war der Lorentzfaktor dieser Myonen also

$$\gamma = \frac{3.1 \text{ GeV}}{105.7 \text{ MeV}} = 29.3 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \tag{34b}$$

ihre Geschwindigkeit war

$$v = c \sqrt{\frac{29.3^2 - 1}{29.3^2}} = 0.9994 c, \tag{34c}$$

und die vom Magnetfeld des Rings erzeugte Lorentzkraft beschleunigte sie radial mit

$$a = \frac{v^2}{7 \text{ m}} \approx 1.3 \cdot 10^{16} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} . \quad (34\text{d})$$

Die von der ART vorhergesagte Zeitdilatation, die die Lebensdauer der Myonen von  $2.198 \mu\text{s}$  auf  $64.44 \mu\text{s} = \gamma \cdot 2.198 \mu\text{s}$  verlängert, wurde mit einer Genauigkeit von  $0.1 \%$  bestätigt:

$$\underbrace{d\tau}_{2.198 \mu\text{s}} \stackrel{(15\text{h})}{=} \underbrace{\sqrt{1 - \frac{\rho^2 \omega^2}{c^2}}}_{1/29.3} \underbrace{dt}_{64.44 \mu\text{s}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad (35)$$

Die ART behauptet, dass Uhren im Gravitationsfeld langsamer gehen, siehe [2, §3] und unser Resultat (32). Dies Resultat wurde seit den siebziger Jahren experimentell bestätigt [7], und heutzutage wird es jeden Tag durch das Global Positioning System bestätigt [8].

Das Äquivalenzprinzip (18) besagt, dass die Zeitdilatation (35) lokal ebenso gut als der Effekt (32) eines Gravitationsfeldes erklärt werden kann, d. h. dies ist eine mögliche alternative Erklärung der beobachteten Zeitdilatation. Das Äquivalenzprinzip sagt jedoch *nicht*, dass es irgend eine Zeitdilatation *zusätzlich* zu (35) gibt.

## 6. Ideale und Reale Uhren: Die „Uhren-Hypothese“

Die von der ART vorhergesagte Zeitdilatation von Uhren, die in einem rotierenden Bezugssystem ruhen, wurde durch das Myon-Experiment bestätigt, siehe (35). Dabei gibt es jedoch ein Problem: Wie kann man sicher sein, dass die Beschleunigung nicht die Funktion der beschleunigten Uhr beeinträchtigt? Um das Problem besser zu verstehen, ersetzen wir die Myonen durch eine Pendeluhr, die aus einer Masse  $M$  besteht, die an einem dünnen Faden mit Länge

$L$  und Masse  $m_w$  aufgehängt ist. Das andere Ende des Fadens ist an einem Fixpunkt im rotierenden System befestigt. Aus der Sicht eines mitbewegten Beobachters, der im rotierenden System ruht, hat das Pendel die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{a}} \quad \text{falls } m_w \ll M, \text{ mit } a = \rho\omega^2. \quad (36)$$

Wenn der mitbewegte Beobachter in einem Labor der Größe  $\ll \rho$  eingeschlossen ist, kann er die Beschleunigung  $a$  als Gravitationsbeschleunigung  $g$  interpretieren. Ein anderer Beobachter, der in einem Inertialsystem ruht, wird die Zeitdilatation (15h) der rotierenden Uhr wahrnehmen.

Wenn man jetzt versucht, die Formel (15h) durch Variation von  $\omega$  systematisch zu überprüfen, dann steht man vor einem Problem: Mit zunehmender Rotationsfrequenz wird auch die Länge  $L$  des Fadens zunehmen (weil der Elastizitätsmodul jedes realen Materials endlich ist), und folglich wird sich die Eigenfrequenz der Pendeluhr ändern. Und bei weiter gesteigerter Rotationsgeschwindigkeit wird der Faden des Pendels schließlich reißen, so dass überhaupt keine Zeitmessung mehr mit dieser Uhr möglich ist. Deshalb kann (15h) nur näherungsweise bei kleiner Rotationsgeschwindigkeit überprüft werden, wenn man eine Pendeluhr zu diesem Zweck verwendet.

Natürlich gibt es andere Arten von Uhren, die sich besser zur Prüfung von (15h) eignen. Aber alle werden in irgend einer Weise durch die Beschleunigung beeinflusst, sind also keine idealen Uhren. Selbst die Zerfallsrate von Myonen, die in Abschnitt 5 diskutiert wurde, ist keine ideale Uhr. Lorek et. al. [9] haben darauf hingewiesen, dass feldtheoretische Effekte wie die Erzeugung von Teilchen aus dem Vakuum in beschleunigten Bezugssystemen (dies ist der Unruh-Effekt [10]), oder die Paarerzeugung von Teichen und Antiteilchen bei hinreichend hoher Energie die Geschwindigkeit

beeinflussen, mit der die Zeit gemäß irgend einer Art realer Uhren vergeht.

Bei all unseren Überlegungen in den vorangegangenen Abschnitten haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass die Funktion der Standarduhren nicht durch Beschleunigungen beeinflusst wird, es sich in dieser Hinsicht also um ideale Uhren handelt. Waren unsere Überlegungen überhaupt sinnvoll, wenn es solche Uhren in der Realität gar nicht gibt?

Oftmals begegnet man in der Literatur der „Uhrenhypothese“. Sie besagt dass Standarduhren, die die Eigenzeit an ihrer jeweiligen Position anzeigen, nicht von ihrer Beschleunigung beeinflusst werden, sondern so funktionieren als wären sie ideale Uhren. Brown und Read [12] haben vorgeschlagen, den missverständlichen Begriff „Uhrenhypothese“ durch „Uhrenbedingung“ zu ersetzen. Diese Wortwahl ist tatsächlich viel besser. Denn sie betont, dass man nicht erwarten kann dass jede beliebige Art von Uhr eine geeignete Standarduhr für jedes beliebige Bezugssystem ist, sondern dass man für jedes Bezugssystem sorgfältig eine geeignete Art von Uhr als Standarduhr auswählen muss, um sicherzustellen dass diese Standarduhr nicht signifikant von der Beschleunigung des Bezugssystems, in dem sie ruht, beeinflusst wird. In diesem Sinne besagt die Uhrenhypothese, dass man für jedes experimentell zugängliche beschleunigte Bezugssystem geeignete reale Standarduhren finden kann.

Eisele [11] hat die Zerfallsrate beschleunigter Myonen unter Berücksichtigung feldtheoretischer Effekte berechnet. Seine Rechnung bestätigt, dass die Zerfallsrate von Myonen tatsächlich keine ideale Uhr ist. Die Rechnung zeigt aber auch, dass diese Art realer Uhren einer idealen Uhr bemerkenswert nahe kommt: In den Speicherring-Experimenten mit Myonen [5, 6], die in Abschnitt 5 erwähnt wurden, wurde die Relation (15h) mit einer Genauigkeit von  $10^{-3}$  bestätigt. Nach Eiseles Berechnung würde dies Experiment eine

Genauigkeit besser als  $10^{-25}$  benötigen, um eine Abweichung von (15h) zu bemerken.

Folglich ist die Präzision, mit der die Vorhersage (15h) der ART für die Zeitdilatation in rotierenden Systemen getestet werden kann, derzeit nicht durch das Fehlen einer idealen Uhr begrenzt, sondern durch die unzureichende Präzision anderer Teile des Experiments. Es erscheint wenig wahrscheinlich, dass sich an dieser Situation in absehbarer Zukunft etwas ändern wird.

## Literatur

- [1] R. J. Cook: *Physical time and physical space in general relativity*, Am. J. Phys. **72**, 214–219 (2004)  
<http://dx.doi.org/10.1119/1.1607338>  
alternative source: [http://staff.ustc.edu.cn/~jmy/documents/publications/physical time and space.pdf](http://staff.ustc.edu.cn/~jmy/documents/publications/physical%20time%20and%20space.pdf)
- [2] A. Einstein: *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*,  
Ann. Phys. (Leipzig) **35**, 898–908 (1911), [http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1911\\_35\\_898-908.pdf](http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/einstein-papers/1911_35_898-908.pdf)
- [3] Torsten Fließbach: *Allgemeine Relativitätstheorie* (Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, <sup>(4)</sup>2004)
- [4] B. Rossi, D. B. Hall: *Variation of the Rate of Decay of Mesotrons with Momentum*, Phys. Rev. **59**, 223–228 (1941)  
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRev.59.223>

- [5] F. J. M. Farley, E. Picasso: *The Muon ( $g - 2$ ) Experiments*, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **29**, 243–282 (1979)  
<http://dx.doi.org/10.1146/annurev.ns.29.120179.001331>  
or <http://www.lns.cornell.edu/~dlr/g-2/references/annurevE001331.pdf>
- [6] G. W. Bennett et al.: *Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL*, Phys. Rev. D **73**, 072003 (2006)  
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.73.072003>  
arXiv: <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0602035>
- [7] J. C. Hafele, R. E. Keating: *Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains*, Science **177**, 168–170 (1972)  
<http://dx.doi.org/10.1126/science.177.4044.168>
- [8] N. Ashby: *Relativity in the Global Positioning System*, Liv. Rev. Rel. **6**, no.1, 42pp (2003)  
<http://dx.doi.org/10.12942/lrr-2003-1>
- [9] K. Lorek, J. Louko, A. Dragan: *Ideal clocks – a convenient fiction*, Class. Quant. Grav. **32**, 175003 (2015)  
<http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/32/17/175003>  
arXiv:1503.01025 <http://arxiv.org/abs/1503.01025>
- [10] Luis C. B. Crispino, Atsushi Higuchi, George E. A. Matsas: *The Unruh effect and its applications* Rev. Mod. Phys. **80**, 787–838 (2008)  
arXiv:0710.5373 [gr-qc] <http://arxiv.org/abs/0710.5373>
- [11] A. M. Eisele: *On the behaviour of an accelerated clock*, Helv. Phys. Acta **60**, 1024–1037 (1987)  
<http://dx.doi.org/10.5169/seals-115884>

- [12] H. R. Brown, J. Read: *Three Common Misconceptions in General Relativity*, arXiv: 1512.09253 (2015)  
<http://arxiv.org/abs/1512.09253>