

Das Weltmodell des Ptolemaios

Mit dem Almagest verfügen wir über ein detailliertes
Bild der Astronomie in der Griechischen Antike

Übersicht

Zunächst werden die Sonnen- und Planetenmodelle der Griechischen Antike schrittweise entwickelt, und die jeweils erreichte Genauigkeit berechnet. 1. Schritt: Aristarchs einfaches Kreismodell, Tabelle 1 auf Seite 11. 2. Schritt: Hipparchs Modell mit zentrumsverschobenen Kreisbahnen, Tabelle 2 auf Seite 19. 3. Schritt: Ptolemaios' Modell mit Equanten, Tabelle 3 auf Seite 25.

Im Abschnitt 3 wird das Weltmodell des Ptolemaios rekonstruiert. Wir zeigen, dass es sich um ein vollständiges, dynamisches Modell handelt, nicht nur um ein kinematisches. Es stellt sich heraus, dass er es – basierend auf seinem Verständnis von Raum und Vakuum – genau so gestalten musste, wie er es tat. Tabelle 6 auf Seite 41 beschreibt den Aufbau des Ptolemäischen Kosmos.

Vorab geben wir im Abschnitt 1 einen kurzen Abriss der Überlieferungsgeschichte des Almagest.

Inhalt

1. Die Überlieferung des Almagest	2
2. Kinematische Modelle	4
2.1. Kreise	4
2.2. Kreise mit Zentrumsverschiebung	12

2.3. Kreise mit Zentrumsverschiebung und Equant	20
2.4. Skalierung der Distanzen	26
2.5. Eine fatale Vereinfachung	26
3. Ptolemaios' dynamisches Weltmodell	30
3.1. Ptolemaios' Raum	30
3.2. Ptolemaios' Vakuum	36
4. Nachbemerkung	41
A. Anhang	44
A.1. Referenzdaten	44
A.2. Berechnung der Winkel	45
A.3. Die Länge der Jahreszeiten 2008/09	47
A.4. Rotationsgeschwindigkeit mit Equant	47
Literatur	48

1. Die Überlieferung des Almagest

Ptolemaios veröffentlichte die *Μαθηματικὴ Συναξίς*¹ etwa um das Jahr 150 in Alexandria. Manitius übersetzte den wenig aussagekräftigen Titel frei und zutreffend mit *Handbuch der Astronomie*. Das Buch wurde (wie alle Bücher der Antike) nicht gedruckt, sondern durch Schreiber manuell vervielfältigt – teils sofort, teils im Lauf der folgenden Jahrhunderte. Ungefähr ein halbes Dutzend dieser handschriftlichen Codizes des Almagest blieb bis in unsere Zeit erhalten.

Die erste gedruckte Ausgabe des griechischen Textes gab Simon Grynäus von Vehringen 1538 im Verlag von Johannes Walder in Basel heraus. Diese Ausgabe sei „mit allen Mängeln eines Druckes

¹ (griechisch) = Mathematisches System

des 16^{ten} Jahrhunderts behaftet“ gewesen, merkt Manitius höflich aber deutlich an. Und auch der zweite Druck, den Nicolas Halma 1813 und 1816 als griechisch-französische Bilingue im Verlag Henri Grand in Paris herausgab [1], genügte nicht den Qualitätsansprüchen der Altphilologen. Erst die dritte Druckausgabe durch Johan Ludvig Heiberg im Jahr 1898 [2] im Verlag B.G.Teubner in Leipzig fand endlich allgemeine Zustimmung. Eine deutsche Übersetzung durch Karl Manitius [3] erschien 1912 ebenfalls bei Teubner.

Der griechische Originaltext kam erst in der Mitte des 15. Jahrhunderts mit Flüchtlingen aus Byzanz nach Westeuropa. Bekannt geworden war der *Almagest* hier aber schon dreihundert Jahre früher, auf dem Umweg über Arabien. Die Araber hatten das Erbe der Griechischen Antike aufmerksamer verarbeitet und besser bewahrt als die Europäer. Nebenbei bemerkt ist ihnen auch der inoffizielle Titel zu verdanken, unter dem das Buch des Ptolemaios heute bekannt ist. Denn die *Συνταξις* wurde bald als *Μεγαλη Συνταξις*² bezeichnet, und schließlich wurde *Μεγαλη* zu *Μεγισθη*³ gesteigert, was die Araber zu „Al Magest“, verballhornten. An der Universität von Toledo übersetzte um das Jahr 1170 Gerard von Cremona dutzende wissenschaftlicher Werke aus dem Arabischen ins Lateinische, um sie dem rückständigen Europa zugänglich zu machen, darunter auch den *Almagest* des Ptolemaios. Gerards lateinischer *Almagest* wurde 1515 in Venedig gedruckt (herausgegeben von Peter Liechtenstein)[4].

Häufiger als der *Almagest* selbst wurden in Europa zwei Lehrbücher studiert, die auf dem *Almagest* basieren: Zunächst der *Tractatus de Sphaera*[5] von Johannes de Sacrobosco, erschienen um 1230 in Paris. Als Standardwerk abgelöst wurde der Traktat durch die *Theoricæ Planetarum Novae*[6] von Peurbach (Georg Aunpekh), die Regiomontanus (Johannes Müller) nach Peurbachs frühem

² (griechisch) = Großes System

³ (griechisch) = das Größte

Tod vollendete und 1472 in Nürnberg herausgab. Dies Buch blieb das maßgebliche Lehrwerk der Astronomie in Europa, bis mit dem Aufkommen der Newtonschen Physik am Ende des 17. Jahrhunderts das Interesse der Astronomen an Ptolemaios' Lehre erlosch.

Einen ausführlichen Bericht der Überlieferungsgeschichte des Almagest findet man im Vorwort von [3].

2. Kinematische Modelle der Sonnen- und Planetenbahnen

Wir stellen die antiken Modelle in drei – aufeinander aufbauenden – Schritten vor, und ermitteln bei jedem Schritt die Genauigkeit, mit der das Modell die tatsächlichen Bahnen von Sonne und Planeten reproduzieren kann. Das hat den Vorteil, dass bei jeder Verfeinerung des Modells Zweck und Nutzen der Maßnahme deutlich erkennbar werden.

2.1. Erster Schritt: Alle Planeten (einschließlich der Erde) bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit auf Kreisbahnen, in deren Mittelpunkt die Sonne steht.

Dies war vermutlich das Modell des Aristarch von Samos, das Archimedes mit wenigen Worten im Psammites [7] skizziert. Um die geometrischen Konstruktionen zu vereinfachen, hat Ptolemaios sein Modell zunächst zweidimensional konstruiert, legte also alle Planetenbahnen in die Ebene der Ekliptik, und flickte erst ganz zum Schluss die dritte Dimension an. Da wir vom PC un-

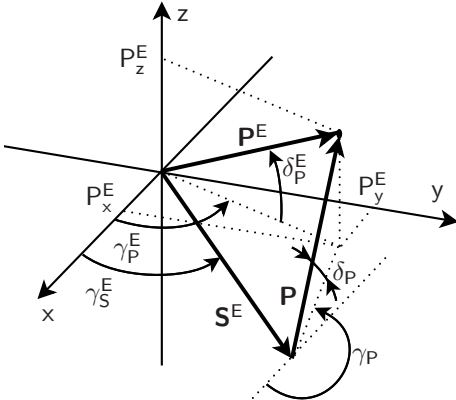


Abb. 1: Ortsvektoren von Sonne und Planeten

terstützt werden, können wir auf diese Vereinfachung verzichten, und bauen das Modell von Anfang an dreidimensional auf. In Abbildung 1 wird die Nomenklatur erklärt. Im Zentrum des dort dargestellten Koordinatensystems befindet sich die Erde. Die x- und y-Achsen liegen in der Ekliptischen Ebene, die positive x-Achse ist am Frühlingspunkt orientiert. Die Position eines Planeten wird durch den Ortsvektor

\mathbf{P}^E beschrieben, die Position der Sonne durch den Ortsvektor \mathbf{S}^E . Der Vektor \mathbf{P} weist von der Sonne zum Planeten. Wir werden sowohl kartesische Koordinaten als auch Kugelkoordinaten verwenden:

$$\mathbf{P}^E = (P_x^E, P_y^E, P_z^E) = \{P^E, \gamma_P^E, \delta_P^E\} \quad (1a)$$

$$\mathbf{S}^E = (S_x^E, S_y^E, 0) = \{S^E, \gamma_S^E, 0\} \quad (1b)$$

$$\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z) = \{P, \gamma_P, \delta_P\} \quad (1c)$$

Das hochgestellte E bedeutet also immer: von der Erde aus gesehen. Der Sonnenvektor liegt in der Ekliptischen Ebene, deshalb sind seine z-Komponente und seine ekliptische Breite gleich Null. Zusätzlich benutzen wir zwei sonnenzentrierte Koordinatensysteme, siehe Abbildung 2. Das links dargestellte System ist das gleiche wie in Abbildung 1, aber in der Ekliptischen Ebene parallelverschoben, so dass sich die Sonne in seinem Nullpunkt befindet.

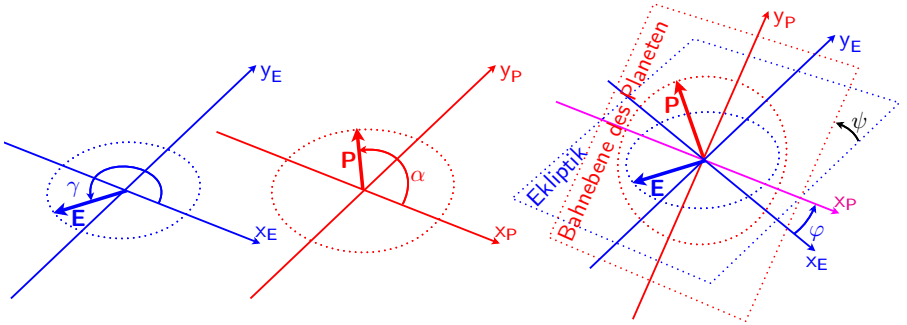


Abb. 2: Zwei sonnenzentrierte Koordinatensysteme

Die x_P - und y_P -Achsen des zweiten sonnenzentrierten Bezugssystems liegen in der Bahnebene des Planeten \mathbf{P} . Die x_P -Achse dieses Systems ist die Knotenlinie, in der sich die Bahnebene von \mathbf{P} und die Ekliptik schneiden. Auf der positiven x_P -Achse tritt der Planet von Süden nach Norden durch die ekliptische Ebene. Das Koordinatensystem (x_P, y_P, z_P) des Planeten geht aus dem ekliptischen Koordinatensystem (x_E, y_E, z_E) durch eine Drehung φ um die (nicht eingezeichnete) z_E -Achse und eine anschließende Drehung ψ um die x_P -Achse hervor. φ ist Knotenwinkel, ψ der Kippwinkel der Planetenbahn \mathbf{P} . Vektoren, Winkel und Achsen, die in der ekliptischen Ebene liegen, sind in Abb. 2 blau eingezeichnet, solche die in der Bahnebene des Planeten liegen, sind rot dargestellt. Die Achse x_P liegt in beiden Ebenen, der Kippwinkel ψ in keiner dieser Ebenen.

Die Positionen \mathbf{S}^E und \mathbf{P}^E der Sonne und des Planeten, jeweils von der Erde aus gesehen, sind

$$\mathbf{S}^E = -\mathbf{E} \quad (2a)$$

$$\mathbf{P}^E = -\mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (2b)$$

Wir modellieren zuerst die Sonnenposition \mathbf{S}^E . Für die Längewinkel von \mathbf{S}^E und \mathbf{E} gilt zu jeder Zeit t :

$$\gamma_{\mathbf{S}}^E(t) = \gamma(t) + \pi \quad (3a)$$

$$\gamma(t) = \gamma_o + \frac{\partial\gamma}{\partial t} \cdot t \quad \text{mit } \gamma_o \equiv \gamma(t=0) \quad (3b)$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{2\pi}{\text{Jahr}} \quad (3c)$$

Es sind also für das Sonnenmodell (2a) drei freie Parameter zu bestimmen:

- * Der Betrag E des Bahnradius,
- * Die Dauer des Jahres,
- * Der Winkel γ_o zur Zeit $t=0$.

Der Betrag von \mathbf{E} ist konstant, nämlich per Definition

$$E = 1 \text{ Astronomische Einheit} = 1 \text{ AU} . \quad (4)$$

Die Länge eines Jahres – definiert als die Zeit von Frühlingsanfang bis Frühlingsanfang des folgenden Jahres – gibt Ptolemaios in Buch 3 Kapitel 1 des Almagest an mit

$$\begin{aligned} \text{Jahr}_{\text{Ptolemaios}} &= \left(365 + \frac{14}{60} + \frac{48}{60 \cdot 60} \right) \text{Tage} \\ &= 365 \text{ Tage } 5\text{h}:55\text{m} . \end{aligned} \quad (5)$$

Gemessen am Gang von Atomuhren ist die Länge des so bestimmten Tropischen Jahres kein konstanter Wert, sondern schwankt aufgrund verschiedener Störungen der Erdbahn jedes Jahr um etliche Minuten. Als Mittleres Tropisches Jahr wurde deshalb 1955 definiert:

$$\text{Mittleres Tropisches Jahr}_{\text{modern}} = 365 \text{ Tage } 5\text{h}:48\text{m}:45\text{s} . \quad (6)$$

Diese Jahreslänge wird in Gleichung (3c) eingesetzt. Der Winkel γ_o bei einem beliebigen Zeit-Nullpunkt muss durch Vergleich mit Beobachtungen bestimmt werden.

Als Nullpunkt der Zeit wählen wir den 1. Januar 2008 00:00 UT, und ersetzen die Beobachtungen durch tabellierte Ephemeriden, die – gemessen an der Genauigkeit unseres Modells – als „exakt“ gelten können. Genauer dazu in Anhang A.1. Ein beliebig geratenes γ_o wird in (3) eingesetzt, damit lässt sich für jedes Datum die Differenz zwischen dem Modell- γ_5^E und dem γ_5^E der tabellierten Ephemeriden berechnen. Die größte der Differenzen – im Folgenden F_{\max} genannt – ist ein Maß für den Fehler des Modells. Nach dem systematischen Ausprobieren von etwa 6000 γ_o -Werten hat der PC mit $\gamma_o = 1.7458 = 100.03^\circ$ den optimalen Winkel – sprich minimiertes F_{\max} – gefunden. Das Sonnenmodell ist damit vollständig:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^E(t) &= -\mathbf{E}(t) \\ &= \left\{ 1 \text{ AU}, 1.7458 + \frac{2\pi}{365 \text{ Tage } 5\text{h}:48\text{m}:45\text{s}} \cdot t + \pi, 0 \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

$$F_{\max} = 2^\circ$$

Jetzt modellieren wir **P**. Im Koordinatensystem $x_P/y_P/z_P$ von Abbildung 2 ändert der Winkel α sich gleichmäßig mit der Zeit:

$$\alpha(t) = \alpha_o + \frac{\partial\alpha}{\partial t} \cdot t \quad \text{mit } \alpha_o \equiv \alpha(t=0) \quad (8a)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{2\pi}{\text{Planetenjahr}} \quad (8b)$$

Das Modell (2b) für \mathbf{P}^E wird demnach :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^E(t) &= \left\{ \mathbf{P}^E(t), \gamma_{\mathbf{P}}^E(t), \delta_{\mathbf{P}}^E(t) \right\} \\ &= -\mathbf{E}(t) + \mathbf{P}(t)\end{aligned}\tag{9a}$$

$-\mathbf{E}(t)$ wird mit dem Modell (7) berechnet. (9b)

$$\mathbf{P}(t) = \left\{ \mathbf{P}, \alpha_o + \frac{2\pi}{\text{Planetenjahr}} \cdot t, 0 \right\}\tag{9c}$$

im Koordinatensystem $x_{\mathbf{P}}/y_{\mathbf{P}}/z_{\mathbf{P}}$ von Abbildung 2

$$= \left\{ \mathbf{P}, \gamma_{\mathbf{P}}(t), \delta_{\mathbf{P}}(t) \right\}\tag{9d}$$

im Koordinatensystem $x_E/y_E/z_E$ von Abbildung 2

Wie man seinen PC programmieren muss, damit er den Winkel α bei bekanntem Knotenwinkel φ und Kippwinkel ψ in die Winkel $\gamma_{\mathbf{P}}$ und $\delta_{\mathbf{P}}$ umrechnet, wird in [8] erklärt.

Ptolemaios wollte nur die Winkel $\gamma_{\mathbf{P}}^E$ und $\delta_{\mathbf{P}}^E$ beschreiben, unter denen die Planeten von der Erde aus sichtbar sind, aber nicht die Abstände \mathbf{P}^E . Zur Berechnung dieser Winkel genügt – wie in Anhang A.2 gezeigt wird – die Kenntnis der relativen Grösse \mathbf{P}/E , der absolute Wert von \mathbf{P} ist nicht erforderlich. Um $\gamma_{\mathbf{P}}^E(t)$ und $\delta_{\mathbf{P}}^E(t)$ mit Modell (9) zu berechnen, sind – zusätzlich zum Sonnenmodell (7) – für jeden Planeten 5 Parameter erforderlich:

- * Die Dauer des Planetenjahrs
- * Der Winkel α_o zur Zeit $t=0$
- * Der Knotenwinkel φ
- * Der Kippwinkel ψ
- * Die relative Größe P/E des Bahnradius.

Die Dauer der Planetenjahre kannte Ptolemaios mit recht guter Genauigkeit, da ihm Beobachtungsdaten aus mehr als fünf Jahrhunderten zur Verfügung standen. Wir entnehmen sie der modernen Literatur [9].

Die verbleibenden 4 Planetenparameter ermitteln wir durch systematisches Probieren und Vergleich mit „exakten“ Ephemeriden. Da die Parameter sich wechselseitig beeinflussen, kann man nicht einen nach dem andern optimieren, sondern muss an allen Stell-schrauben gleichzeitig drehen. Das treibt den Aufwand exponentiell in die Höhe. Damit die Suchwege durch den 4-dimensionalen Parameterraum (der in den folgenden Erweiterungen des Modells zum 6-dimensionalen Parameterraum anwachsen wird) möglichst kurz bleiben, hat es sich bewährt nicht blindlings irgendwo zu starten, sondern die tabellierten Werte [9] elliptischer Planetenbahnen als Ausgangspunkt der Optimierung zu wählen.

Die Berechnung der Winkel γ_P^E und δ_P^E wird im Anhang A.2 detailliert erklärt. Für jedes Datum wird der Fehler F des Modells durch Vergleich mit den „exakten“ Referenz-Ephemeriden berechnet:

$$F = \sqrt{\left(\gamma_{P,Referenz}^E - \gamma_{P,Modell}^E\right)^2 + \left(\delta_{P,Referenz}^E - \delta_{P,Modell}^E\right)^2} \quad (10)$$

F_{\max} , der größte der 12 bis 50 so berechneten Fehler jedes Planetenmodells, wird durch Variation der Parameter minimiert. Die Optimierung erfordert je nach Konvergenzgeschwindigkeit den Test von etwa 10 000 bis 250 000 Parametersätzen pro Planet. Das Ergebnis ist in Tabelle 1 aufgelistet.

P/E:	Bahnradius/(1 AU)			
φ :	ekliptische Länge des Bahnknotens			
ψ :	$<$ (Bahnebene _{Planet} , Ekliptik)			
F _{max} :	maximaler Fehler des Modells			
	P/E	φ	ψ	F _{max}
Merkur	0.37	53°	5.75°	10°
Venus	0.72	77°	3.38°	1°
Erde	1.00	–	0.00°	2°
Mars	1.45	73°	1.88°	11°
Jupiter	5.47	98°	1.30°	6°
Saturn	9.53	112°	2.48°	7°

Tabelle 1: Die Planeten bewegen sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf Kreisen, in deren Zentrum die Sonne steht.

Das Modell gibt die Planetenschleifen, die den frühen Astronomen so viel Kopfzerbrechen bereitet hatten, qualitativ korrekt wieder. Darin liegt seine große Stärke. Allerdings sind Fehler von mehreren Grad für Ptolemaios inakzeptabel. Gute antike Beobachter erreichten eine Präzision von etwa 1/3 Grad, und Ptolemaios war nicht bereit, messbare Differenzen zwischen seinem Modell und den Messdaten zu dulden.

Eine interessante Frage ist, ob er überhaupt irgendwelche – wenn auch unmessbar kleinen – Fehler für unvermeidlich hielt, oder ob er glaubte, ein Planetenmodell könne so exakt stimmen wie ein geometrischer Satz des Euklid. Im Almagest habe ich nirgendwo eine Fehlerrechnung gesehen. Beobachtungsdaten bewertet Ptolemaios nach einem einfachen schwarz-weiß Schema: Entweder erscheinen sie ihm zuverlässig und vertrauenswürdig, dann betrachtet er sie als fehlerfrei und verwendet sie zur Ermittlung der Modellparameter. Oder aber sie erscheinen ihm unzuverlässig, dann verwirft er sie. Zur Berechnung der Bahnparameter verwendet er immer nur so viele Beobachtungsdaten, wie freie Parameter

zu bestimmen sind. Dadurch kommt er nie in die Verlegenheit, so etwas wie eine Ausgleichsrechnung anstellen zu müssen.

2.2. Zweiter Schritt: Alle Planeten (einschließlich der Erde) bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit auf Kreisbahnen, deren Mittelpunkte geringfügig von der Sonnenposition abweichen.

Schon Hipparch hatte festgestellt, dass die Sonne sich im Verlauf eines Jahres scheinbar mit ungleichmäßiger Winkelgeschwindigkeit um die Erde bewegt. Zu seiner Zeit dauerte der Sommer $92\frac{1}{2}$ Tage, der Frühling sogar $94\frac{1}{2}$ Tage, Frühling und Sommer zusammengekommen dauerten länger als $1/2$ Jahr. Es gab mehrere naheliegende Möglichkeiten zur Erklärung dieser Beobachtungstatsache:

- * Die Sonnenbahn ist kein Kreis, oder
- * die Sonne bewegt sich zwar auf einem Kreis, aber mit ungleichmäßiger Geschwindigkeit, oder
- * die Sonne bewegt sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf einem Kreis, dessen Zentrum nicht identisch ist mit dem Zentrum des Kosmos (d.h. der Erde).

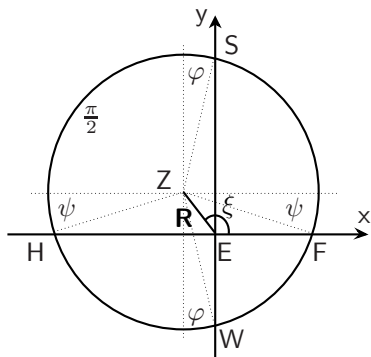


Abb. 3: Das Sonnenmodell des Hipparch

Hipparch entschied sich für die dritte Möglichkeit, und Ptolemaios übernahm Hipparchs Sonnenmodell, und die Daten auf denen es beruhte, unverändert in seine Mathematische Syntaxis. In Abb. 3 ist die Methode dargestellt: Die Sonnenbahn ist kreisrund und hat den Radius 1 Astronomische Einheit = 1 AU. Ihr Zentrum Z ist von der Erde E in Richtung der ekliptischen Länge ξ um die Strecke R verschoben. Die Verschiebung

in Richtung der Sonnenposition bei Herbst-Tagundnachtgleiche (ekliptische Länge 180°) ist $AU \cdot \sin(\varphi)$, die Verschiebung in Richtung der Sonnenposition bei Sommer-Sonnenwende (ekliptische Länge 90°) ist $AU \cdot \sin(\psi)$. Zu Hipparchs Lebenszeit (um 150 v. Chr.) lag das Apogäum bei etwa 66° ekliptischer Länge, deshalb war damals der Frühling die längste Jahreszeit. Heute – 2.15 Jahrtausende nach Hipparch – liegt das Apogäum (wie wir gleich sehen werden) bei 103° , so dass jetzt der Sommer die längste Jahreszeit ist. Das Apogäum dreht sich also relativ zum Frühlingspunkt rechtläufig (d.h. in gleicher Richtung wie die Planeten) um etwa $(103^\circ - 66^\circ) / 2150 \text{ Jahre} \approx +1.7^\circ / 100 \text{ Jahre}$.

Ein großer Teil dieser Drehung, nämlich etwa $+1.4^\circ / 100 \text{ Jahre}$, geht auf das Konto der lunisolaren Präzession der Erde. Relativ zum Fixsternhintergrund beträgt die Drehung des Sonnenapogäums also nur $+0.3^\circ / 100 \text{ Jahre}$. Ptolemaios kannte die scheinbare Rotation der Fixsterne relativ zum Frühlingspunkt⁴ und schätzte sie mit $+1^\circ$ pro hundert Jahren ab. Die Drehung des Apogäums relativ zum Fixsternhintergrund bemerkte er nicht, sondern war der

⁴ Als Entdecker dieser Drehung gilt Hipparch.

Meinung, ξ sei konstant. Dafür ist er von neuzeitlichen Astronomen getadelt worden. Denn seit den Beobachtungen des Hipparch waren drei Jahrhunderte vergangen. Als Ptolemaios um das Jahr 150 seine Syntaxis veröffentlichte lag das Sonnenapogäum bei etwa 71° ekliptischer Länge, hatte sich also seit Hipparch um $+5^\circ$ gedreht, während die Drehung der Fixsterne infolge der Präzession in diesem Zeitraum nur $+4^\circ$ betrug. Die Differenz von einem vollen Grad hätte er bei sorgfältiger Analyse der Daten durchaus bemerken können. Tatsächlich wurde die Drehung des Apogäums aber erst siebenhundert Jahre später von Arabischen Astronomen entdeckt.

Folgende Relationen kann man aus Abb. 3 ablesen:

$$\frac{\text{Frühling} + \text{Sommer}}{\text{Herbst} + \text{Winter}} = \frac{\pi + 2\psi}{\pi - 2\psi} \quad (11a)$$

$$\frac{\text{Sommer} + \text{Herbst}}{\text{Frühling} + \text{Winter}} = \frac{\pi + 2\varphi}{\pi - 2\varphi} \quad (11b)$$

$$R = 1 \text{ AU} \cdot \sqrt{\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi} \quad (11c)$$

$$\xi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \psi}\right) \quad (11d)$$

Die Längen der Jahreszeiten 2008/09 lassen sich aus den tabellierten Sonnenephemeriden extrahieren, siehe Anhang A.3. Damit ergibt sich aus Gleichung (11):

$$R = 0.033 \text{ AU} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} \xi &= 1.799 = 103^\circ \\ &= \text{Ekliptische Länge der Sonne am 4. Juli 2008} \end{aligned} \quad (12b)$$

Die Entfernung zwischen Erde und Sonne ist also nach unserem Modell im Apogäum um 3.3% größer als der Mittelwert 1 AU, im Perigäum um 3.3% kleiner. Die tabellierten Ephemeriden – siehe

Anhang A.1 – die natürlich für elliptische Bahnen und ungleichmäßige Bahngeschwindigkeit gelten, bestätigen zwar unseren Wert für ξ , liefern aber nur einen halb so großen Wert für die Exzentrizität:

$$\text{größte Distanz Erde-Sonne (am 4.Juli 2008)} = 1.017 \text{ AU} \quad (13a)$$

$$\text{kleinste Distanz Erde-Sonne (am 5.Jan 2009)} = 0.983 \text{ AU} \quad (13b)$$

Das ist nicht überraschend, denn das Modell von Hipparch und Ptolemaios will ja die beobachtete Variation der Winkelgeschwindigkeit der Sonne *allein* mit der verkürzten Perspektive des irdischen Beobachters erklären, und muss die falsche Annahme gleichmäßiger Bahngeschwindigkeit durch eine übertriebene Annahme über die Exzentrizität der Sonnenbahn kompensieren.

Immerhin liefert dies Modell für die Sonne ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten. Als Hipparch aber den Trick bei der Beschreibung der Planetenbahnen wiederholen wollte, erlebte er eine Enttäuschung. Heute wissen wir, dass die Struktur des Raums im Sonnensystem durch die Masse der Sonne dominiert wird, die mehr als 600x so schwer ist wie alle Planeten zusammen. Der Raum ist deshalb in guter Näherung isotrop, mit der Sonne im Zentrum. Deshalb ist der Drehimpuls – aber nicht die Bahngeschwindigkeit – der Planeten bei ihrer Bewegung um die Sonne konstant, und sie bewegen sich im Perihel schneller als im Aphel. Perihel der Erde (in dem die Erde sich aufgrund der Drehimpulserhaltung schneller bewegt) und Perigäum der Sonne (in dem die Sonne dem irdischen Betrachter aufgrund der verkürzten Perspektive schneller erscheint) sind identisch. Wenn der irdische Beobachter aber die Bewegung eines anderen Planeten beschreibt, dann sind dessen Perihel und Perigäum in keiner Weise korreliert. Der Versuch, die Geschwindigkeitsunterschiede als perspektivische Effekte zu erklären, kann also nur bei der Sonne gelingen.

Dennoch kann man erwarten, dass die Methode auch für die Modellierung der Planeten eine gewisse Verbesserung bringt. Denn man erhält ja pro Planet zwei neue freie Parameter – nämlich die Größe der Zentrumsverschiebung, und ihre Richtung.

Wie beim einfachen Kreismodell wollen wir den PC nach optimierten Parametern suchen lassen, die eine möglichst genaue Übereinstimmung zwischen Modell und den „exakten“ Ephemeriden ergeben. Wir beschreiben die Zentrumsverschiebung durch den Vektor \mathbf{G} , der den Längswinkel ρ hat, siehe Abbildung 4. Der Winkel ρ ist konstant, ebenso die Beträge G und P . Nur der Winkel ζ ändert sich gleichmäßig mit der Zeit. Die Summe von ζ und ρ ist der Längswinkel von \mathbf{P} . Wenn wir zur besonderen Hervorhebung die Vektoren des Bahnradius und der Zentrumsverschiebung im Fall der Erde als \mathbf{E} und \mathbf{H} bezeichnen, dann lautet das Modell mit Zentrumsverschiebung der Kreisbahnen:

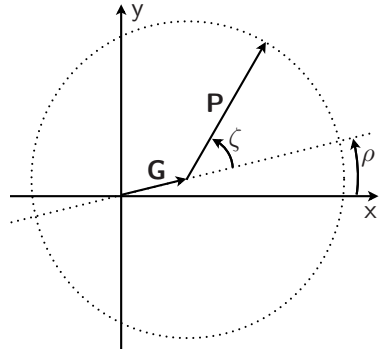


Abb.4: Kreisbahn mit Zentrumsverschiebung

$$\mathbf{S}^E = -\mathbf{E} - \mathbf{H} \quad (14a)$$

$$\mathbf{P}^E = -\mathbf{E} - \mathbf{H} + \mathbf{G} + \mathbf{P} \quad (14b)$$

Wir berechnen zunächst das Sonnenmodell (14a). An der Länge des Jahres ändert sich natürlich nichts, und der Betrag E bleibt 1 AU. Es sind dann noch 3 Parameter zu bestimmen:

* Der Längswinkel⁵ ζ_0 zur Zeit $t=0$

⁵ Erst sehr spät habe ich gelernt, dass der Rest der Welt den Winkel ζ (die „Anomalie“ des Planeten) vom Perihel aus zählt, nicht wie ich vom Aphel aus. Aber da hatte ich keine Lust mehr, alles nochmal zu ändern ...

- * Die Größe H der Zentrumsverschiebung
- * Der Winkel ρ der Zentrumsverschiebung

Natürlich könnten wir H und ρ aus der Berechnung übernehmen, die wir eben nach der Methode des Hipparch durchgeföhrt haben, also einfach $H = R$ und $\rho = \xi + \pi$ setzen. (Der Summand π taucht auf, weil wir jetzt das Aphel der Erde berechnen statt wie zuvor das Apogäum der Sonne). Wir ziehen es aber vor, den PC alle 3 Parameter optimieren zu lassen, weil dies eine gute Gelegenheit ist, die Zuverlässigkeit der Software zu testen. Das Ergebnis der Optimierung steht in Tabelle 2 auf Seite 19. Die Übereinstimmung zwischen unserem Optimierungsverfahren und der geometrischen Methode des Hipparch ist erfreulicherweise perfekt.

Berechnung des Planetenmodells (14b): \mathbf{P} und \mathbf{G} liegen beide in der x_P/y_P -Ebene des Koordinatensystems $x_P/y_P/z_P$ von Abbildung 2. Der Winkel ζ ändert sich gleichmäßig mit der Zeit:

$$\zeta(t) = \zeta_o + \frac{\partial\zeta}{\partial t} \cdot t \quad \text{mit } \zeta_o \equiv \zeta(t=0) \quad (15a)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{2\pi}{\text{Planetenjahr}} \quad (15b)$$

Das Modell (14b) für \mathbf{P}^E wird demnach :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^E(t) &= \left\{ \mathbf{P}^E(t), \gamma_P^E(t), \delta_P^E(t) \right\} \\ &= -\mathbf{E}(t) - \mathbf{H} + \mathbf{G} + \mathbf{P}(t)\end{aligned}\quad (16a)$$

$$\mathbf{P}(t) = \left\{ P, \rho + \zeta_o + \frac{2\pi}{\text{Planetenjahr}} \cdot t, 0 \right\}\quad (16b)$$

im Koordinatensystem $x_P/y_P/z_P$ von Abbildung 2

$$= \left\{ P, \gamma_P(t), \delta_P(t) \right\}\quad (16c)$$

im Koordinatensystem $x_E/y_E/z_E$ von Abbildung 2

$$\mathbf{G} = \left\{ G, \rho, 0 \right\}\quad (16d)$$

im Koordinatensystem $x_P/y_P/z_P$ von Abbildung 2

$$= \left\{ G, \gamma_G, \delta_G \right\}\quad (16e)$$

im Koordinatensystem $x_E/y_E/z_E$ von Abbildung 2

Die Details der Auswertung stehen in Anhang A.2. Für jeden Planeten sind 7 Parameter zu bestimmen:

- * Die Dauer des Planetenjahrs
- * Der Winkel ζ_o zur Zeit $t=0$
- * Die relative Größe P/E des Bahnradius
- * Die relative Größe G/P der Zentrumsverschiebung
- * Der Winkel der Zentrumsverschiebung ρ
- * Der Knotenwinkel φ
- * Der Kippwinkel ψ

Die Dauer der Planetenjahre entnehmen wir wieder der Literatur [9]. Das Optimum der 6 anderen Parameter lassen wir den PC durch Probieren ermitteln. Dazu muss der PC pro Planet etwa 50 000 bis 600 000 Parametersätze austesten. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Tabelle 2 eingetragen.

P/E:	Bahnradius / (1 AU)					
G/P:	(Mittelpunktverschiebung / Bahnradius)					
ρ :	Längenwinkel des Aphel					
φ :	ekliptische Länge des Bahnknotens					
ψ :	\sphericalangle (Bahnebene _{Planet} , Ekliptik)					
F_{\max} :	maximaler Fehler des Modells					
	P/E	G/P	ρ	φ	ψ	F_{\max}
Merkur	0.38	0.318	208°	48°	6.82°	2.9°
Venus	0.71	0.017	217°	76°	3.45°	8'
Erde	1.00	0.033	283°	–	0.00°	0.6'
Mars	1.46	0.151	110°	50°	1.85°	2.3°
Jupiter	5.20	0.097	96°	100°	1.30°	18'
Saturn	9.54	0.108	160°	114°	2.50°	16'

Tabelle 2: Die Planeten bewegen sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit auf Kreisen, deren Zentrum gegen die Sonnenposition verschoben ist.

Der Präzision des Modells bei der Erde (bzw. der Sonne) ist mit einem Fehler von nur 0.6' ausgezeichnet. Aber auch die Bahnbewegungen von Venus, Jupiter und Saturn werden vom Modell recht gut beschrieben. Bei Venus dürfte das daran liegen, dass sie tatsächlich eine fast perfekt kreisrunde Bahn hat. Die ihr zugeordnete Zentrumsverschiebung von 0.017 kompensiert gerade die zu groß gewählte Zentrumsverschiebung der Erdbahn. Das ist überhaupt eine Eigenart dieses Modells. In Gleichung (16a) steht ja die Summe von **H** und **G**. Man kann **H** beliebig vorgeben, und der PC kompensiert diese Vorwahl durch geeignete Festlegung von **G**. Jupiter und Saturn sind bei der Modellierung einfach deshalb gutmütig, weil sie zu jeder Zeit fern von der Erde bleiben. Nur bei Merkur und Mars lässt sich durch Zentrumsverschiebung der Bahnkurve offenbar keine ausreichende Verbesserung des Modells zu erreichen.

Angesichts dieser Schwierigkeiten warf Hipparch das Handtuch. Aber Ptolemaios gab nicht auf, sondern lieferte sein Meisterstück: Er erfand⁶ den Equant.

2.3. Dritter Schritt: Alle Planeten (einschließlich der Erde) bewegen sich auf Kreisbahnen, deren Mittelpunkte geringfügig von der Sonnenposition abweichen. Die Bahngeschwindigkeiten der Planeten werden durch Equanten bestimmt.

Die Winkelgeschwindigkeiten, unter denen Sonne und Planeten von der Erde aus beobachtet werden, sind nicht konstant. Von den drei naheliegenden Erklärungen

- * die Bahnen sind keine Kreise
- * die Bahnen sind Kreise, werden aber mit ungleichmäßiger Geschwindigkeit durchlaufen
- * die Bahnen sind Kreise, werden mit gleichmäßiger Geschwindigkeit durchlaufen, aber ihr Zentrum ist verschoben

hat die dritte das Sonnenproblem ausgezeichnet gelöst, bei den Planeten aber nur einen Teilerfolg gebracht. Fast anderthalb Jahrtausende später erkannte Kepler, dass die *beiden* anderen Optionen genutzt werden mussten: Die Bahnen der Planeten werden statt durch Kreise besser durch Ellipsen beschrieben, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht. Und die ungleichmäßige Geschwindigkeit der Planeten auf ihrer elliptischen Bahn konnte Kepler durch den Flächensatzes einfach und genau modellieren. Ptolemaios suchte und fand eine „konservativere“ Lösung, die die

⁶ Völlig sicher weiß man nicht, ob die Erfindung des Equant wirklich Ptolemaios zuzuschreiben ist. Duke [10] trägt Argumente für die Vermutung vor, dass altindische Astronomen den Equant von griechischen Quellen übernommen haben. Er kann aber nicht klären, ob diese Quellen älter oder jünger als Ptolemaios sind.

Kreisbahnen beibehält, aber mit ungleichmäßiger Bahngeschwindigkeit arbeitet.

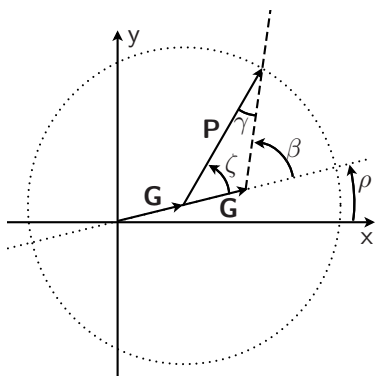


Abb.5: Kreisbahn mit Zentrumsverschiebung und Equant

Von Ellipsen ahnte er nichts, erst recht nichts vom Flächensatz. Stattdessen ersann er eine Konstruktion, die näherungsweise den gleichen Effekt hat. Im 6. Kapitel, 9. Buch des *Almagest* wird sie beschrieben:

Der Vektor **G** der Zentrumsverschiebung wird vom verschobenen Zentrum der Kreisbahn ein zweites mal aufgetragen (siehe Abb. 5) und auf diese Weise ein weiterer Punkt auf der ApSIDENLINIE definiert. Ptolemäus gab ihm keinen Namen, sondern

umschrieb nur seine Funktion. Spätere Autoren haben diesen Punkt *Equant* genannt. Der Equant legt die Geschwindigkeit fest, mit der sich der Planet auf seiner Bahn bewegt. Die vom Equant ausgehende gestrichelte grade Linie dreht sich wie ein Uhrzeiger⁷ mit gleichmäßiger Rotationsgeschwindigkeit

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{2\pi}{\text{Planetenjahr}} \quad (17)$$

Der Planet befindet sich zu jeder Zeit im Schnittpunkt dieser Linie und des Bahnkreises. Jetzt gibt es ein Geschwindigkeitsmaximum

⁷ allerdings vom ekliptischen Nordpol aus gesehen wie bei einer bayrischen Uhr, also entgegen dem normalen Uhrzeigersinn

im Perihel, und ein Minimum im Aphel:

$$\text{im Perihel: } v_{max} = (P + G) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (18a)$$

$$\text{im Aphel: } v_{min} = (P - G) \cdot \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (18b)$$

$$\frac{v_{max}}{v_{min}} = \frac{P + G}{P - G} \quad (18c)$$

Wenn man den Radius P der Kreisbahn gleichgroß wählt wie die große Halbachse der Keplerellipse, und die relative Zentrumsverschiebung G/P gleichgroß wie die numerische Exzentrizität der Keplerellipse (beides tut, wie wir sehen werden, der PC bei der Optimierung der Parameter automatisch), dann ist die Geschwindigkeit der Planeten im Perihel und im Aphel bei Ptolemaios' Modell und bei Keplers Modell *exakt* gleich. Aber nur in diesen beiden Punkten, dazwischen gibt es Unterschiede, die umso größer sind je exzentrischer die Planetenbahn ist.

Für die Bahn des Mars kann man mithilfe des Equanten eine Genauigkeit von bestenfalls etwa 10' erreichen, siehe Tabelle 3 auf Seite 25. Der erste Mensch, der die Marsbahn genauer vermaß, war Tycho Brahe. Seine Messdaten hatten einen Fehler von kleiner 2'. Als Kepler merkte, dass Brahens Daten sich nicht in Ptolemaios' Modell (genauer gesagt, in das was Kepler in wohlwollender Interpretation als Ptolemaios' Modell verstand; denn Ptolemaios selbst hatte im Almagest ein wesentlich schlechteres Modell beschrieben; dazu im Abschnitt 2.5 mehr.) einfügen ließen, verwarf er dies Modell nicht sofort in Bausch und Bogen, sondern versuchte ihm eine Verbesserung in Form eines zusätzlichen freien Parameters hinzuzufügen.

Das war die „Vikarische Hypothese“, die Kepler im 16. Kapitel seiner *Astronomia Nova* [11] beschreibt. Bei Ptolemaios ist der Abstand des Equanten von der Sonne immer genau doppelt so groß

wie die Zentrumsverschiebung des Bahnkreises (siehe Abbildung 5). Kepler erwartete, dass eine bessere Übereinstimmung von Modell und Beobachtung erreichbar sein sollte, wenn er sich von dieser starren Regel löste, und für den Equanten eine beliebige Position auf der Apsidenlinie zuließ. Zu seiner Überraschung brachte dieser zusätzliche Freiheitsgrad überhaupt keinen Vorteil! Die von Ptolemaios gewählte Position des Equanten war bereits die optimale, eine weitere Verbesserung war nicht möglich. Es mag wohl sein, dass diese Einsicht mit dazu beitrug, Keplers Aufmerksamkeit auf elliptische Bahnen und den Flächensatz zu lenken, die Ptolemaios' Equantenmodell so ähnlich sind.

Der Equant nimmt also das, was Kepler später mit seinem Flächensatz wesentlich genauer fasste, soweit vorweg wie es mit einer kreisförmigen Planetenbahn überhaupt möglich ist. Die Bezeichnung Equant⁸ dürfte recht gut die Befriedigung widerspiegeln, die Ptolemaios angesichts dieser Entdeckung verspürte. Denn die Exzentrizität der Bahnkreise wurde natürlich als Schönheitsfehler der Theorie empfunden. Der Equant balancierte die Konstruktion in gewisser Weise wieder aus. In ihrem Zusammenspiel ergaben das Zentrum des Bahnkreises, und die symmetrisch beiderseits von ihm angeordneten Punkte des ursprünglichen Zentrums und des Equanten, wieder ein harmonisches Ganzes.

Die Wissenschaftsgeschichte hat in Ptolemaios zuweilen nur eine Art Buchhalter sehen wollen, der lediglich einen zusammenfassenden Bericht über die Forschungsergebnisse anderer Leute verfasste. Abgesehen davon, dass auch das allein schon eine wichtige Leistung gewesen wäre, muss man die Erfindung des Equanten als einen bemerkenswerten Erfolg von Ptolemaios selbst anerkennen. Mit dieser Konstruktion liess sich eine Präzision der Beschreibung erreichen, die fast anderthalb Jahrtausende lang jeder Überprü-

⁸ lateinisch: punctum aequans = der ausgleichende Punkt

fung standhielt.

Das Modell mit Zentrumsverschiebung und Equant lautet:

$$\mathbf{S}^E = -\mathbf{E}_{\text{Equant}} - \mathbf{H} \quad (19a)$$

$$\mathbf{P}^E = -\mathbf{E}_{\text{Equant}} - \mathbf{H} + \mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}} \quad (19b)$$

Der Index Equant weist darauf hin, dass $\mathbf{E}_{\text{Equant}}$ und $\mathbf{P}_{\text{Equant}}$ sich jetzt nicht mehr mit gleichmäßiger Geschwindigkeit drehen, sondern ihre Rotationsgeschwindigkeit durch Equanten gesteuert wird. In Anhang A.4 wird hergeleitet, wie $\zeta(t)$ von $\beta(t)$ abhängt:

$$\zeta(t) = \beta(t) - \arcsin \left\{ \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{P}} \cdot \sin \beta(t) \right\} \quad (20a)$$

$$\beta(t) = \beta_o + \frac{\partial \beta}{\partial t} \cdot t \quad \text{mit } \beta_o \equiv \beta(t = 0) \quad (20b)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{2\pi}{\text{Planetenjahr}} \quad (20c)$$

Der frei zu wählenden Anfangswinkel ist jetzt β_o statt ζ_o , und $\zeta(t)$ ist jetzt gemäß (20) zu berechnen. Alle andern Formeln des vorherigen Modells können unverändert übernommen werden. Tabelle 3 auf Seite 25 zeigt das Ergebnis der Parameter-Optimierung.

Der Vergleich der Parameter des Ptolemäischen Modells mit Equant (Tabelle 3) und der tabellierten modernen Parameter für elliptische Planetenbahnen (Tabelle 4) auf Seite 25 zeigt ebenfalls, wie nahe das Ptolemäische Modell dem Kepler'schen kam. Mars liegt jetzt „im grünen Bereich“, und auch Merkur verfehlt Ptolemaios' selbstgestecktes Genauigkeitsziel nur so knapp, dass ihn das Ergebnis wahrscheinlich zufriedengestellt hätte – wenn dies sein Modell gewesen wäre. Das war es aber nicht. Bevor wir diesen Punkt klären, beschreiben wir eine Skalierung des Modells, die mit der Präzision der Ergebnisse nichts zu tun hat. Für Ptolemaios war sie trotzdem unverzichtbar, weil (auch) von ihr die Konsistenz seines Weltmodells abhing.

P/E:	Bahnradius / (1 AU)					
G/P:	Mittelpunktverschiebung / Bahnradius					
ρ :	Längenwinkel des Aphel					
φ :	ekliptische Länge des Bahnknotens					
ψ :	\angle (Bahnebene _{Planet} , Ekliptik)					
F _{max} :	maximaler Fehler des Modells					
	P/E	G/P	ρ	φ	ψ	F _{max}
Merkur	0.38	0.207	209°	48°	6.99°	21.8'
Venus	0.72	0.007	235°	77°	3.39°	0.3'
Erde	1.00	0.017	283°	–	0.00°	0.3'
Mars	1.52	0.094	107°	50°	1.85°	10.2'
Jupiter	5.19	0.049	94°	100°	1.30°	1.2'
Saturn	9.52	0.054	160°	114°	2.48°	3.5'

Tabelle 3: Die Planeten bewegen sich auf Kreisen, deren Zentrum gegen die Sonnenposition verschoben ist. Die Bahngeschwindigkeit der Planeten wird durch Equanten gesteuert.

a:	große Halbachse der Ellipse				
e:	elliptische Exzentrizität				
ρ :	Längenwinkel des Aphel				
φ :	ekliptische Länge des Bahnknotens				
ψ :	\angle (Bahnebene _{Planet} , Ekliptik)				
	a	e	ρ	φ	ψ
Merkur	0.387 AU	0.206	209.2°	48.5°	7.00°
Venus	0.723 AU	0.007	234.9°	76.8°	3.39°
Erde	1.000 AU	0.017	283.1°	–	0.00°
Mars	1.524 AU	0.093	106.6°	49.6°	1.85°
Jupiter	5.203 AU	0.048	94.5°	100.5°	1.30°
Saturn	9.578 AU	0.055	159.5°	113.7°	2.49°

Tabelle 4: Literaturwerte für elliptische Bahnen (aus [9])

2.4. Vierter Schritt: Skalierung der Distanzen

Das Sonnenmodell bleibt unverändert, aber das Planetenmodell wird mit reellen Faktoren k multipliziert. k kann für jeden Planeten unterschiedlich gewählt werden:

$$\mathbf{S}^E = -\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}} \quad (21a)$$

$$\mathbf{P}^E = k \cdot (-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}} + \mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}}) \quad (21b)$$

In die Berechnung der Winkel γ_{P}^E und δ_{P}^E gehen nur die Verhältnisse $(k\mathbf{H}/k\mathbf{E}_{\text{Equant}})$, $(k\mathbf{P}_{\text{Equant}}/k\mathbf{E}_{\text{Equant}})$, und $(k\mathbf{G}/k\mathbf{E}_{\text{Equant}})$ ein. Der Faktor k kürzt sich überall heraus. Die Skalierung ändert also nichts an den Vorhersagen des Modells über die Winkel, unter denen die Himmelskörper beobachtet werden. Ptolemaios benötigte von 1 verschiedene Faktoren k , um das Weltmodell mit seiner Vorstellung vom Vakuum in Einklang zu bringen. Das werden wir im Abschnitt 3.2 diskutieren. Dort werden wir auch angeben, welche Werte die k haben.

Vorher müssen wir aber noch erwähnen, dass es eine Differenz gibt zwischen dem, was wir hier als Ptolemaios' Modell darstellen, und dem was Ptolemaios im *Almagest* tatsächlich beschrieben hat.

2.5. Eine fatale Vereinfachung

Der Vektor $k(-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}})$ beschreibt einen zentrumsverschobenen Kreis um die Erde, der als Deferent bezeichnet wird. Auf dem Deferenten rollt der Vektor $k(\mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}})$ als Epizykel ab. Da die Vektoraddition assoziativ ist, ändert sich selbstverständlich absolut nichts, wenn man (21b) umgekehrt liest: Ein Epizykel $k(-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}})$ rollt auf einem Deferenten $k(\mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}})$ ab. Ptolemaios konnte sich offenbar einen kleineren Epizykel auf einem größeren Deferenten leichter vorstellen als den umgekehrten

Fall. Er interpretierte (21b) deshalb folgendermaßen:

Merkur und Venus:

$$\mathbf{P}^E = \underbrace{k \cdot (-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}})}_{\text{Deferent}} + \underbrace{k \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}})}_{\text{Epizykel}} \quad (22a)$$

Mars, Jupiter, und Saturn:

$$\mathbf{P}^E = \underbrace{k \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}})}_{\text{Deferent}} + \underbrace{k \cdot (-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}})}_{\text{Epizykel}} \quad (22b)$$

An sich wäre es vollkommen irrelevant und hätte keinerlei Auswirkungen auf die Vorhersagen des Modells, was man als Deferent und was als Epizykel betrachtet. Es hatte bei Ptolemaios aber Folgen, weil er leider nur den Deferenten eine Zentrumsverschiebung und einen Equant spendierte, nicht jedoch den Epizykeln. Pro Planet gab es bei ihm also nur eine Zentrumsverschiebung und einen Equant, statt zwei.

Wesentlich harmloser ist eine zweite Vereinfachung: Für die Sonne gab er sich mit der zentrumsverschobenen Kreisbahn ohne Equant zufrieden. Das ist das Modell (14), das wir als 2. Schritt beschrieben haben. Daran ist nichts auszusetzen, denn der Fehler dieses Modells beträgt für die Sonne nur $0.6'$, ist also nach Ptolemaios' Maßstäben praktisch Null.

So sieht also das tatsächlich im Almagest beschriebene Modell aus:

$$\mathbf{S}^E = -\mathbf{E} - \mathbf{H} \quad (\text{Also ohne Equant}) \quad (23a)$$

Merkur und Venus:

$$\mathbf{P}^E = k \cdot (-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}} + \mathbf{P}) \quad (23b)$$

Mars, Jupiter, und Saturn:

$$\mathbf{P}^E = k \cdot (-\mathbf{E} + \mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}}) \quad (23c)$$

Meine Software ist nicht in der Lage, die Parameter für Modell (23b) zu optimieren. Und ich bin nicht motiviert, Zeit in die Entwicklung einer passenden Software zu investieren. Stattdessen habe ich die optimierten Parameter und Fehler aller Planeten für Modell (23c) berechnet, das Ptolemaios nur für Mars, Jupiter, und Saturn verwendet. Tabelle 5 auf Seite 28 enthält das Ergebnis.

P/E:	Bahnradius / (1 AU)					
G/P:	Mittelpunktverschiebung / Bahnradius					
ρ :	Längenwinkel des Aphel					
φ :	ekliptische Länge des Bahnknotens					
ψ :	\sphericalangle (Bahnebene _{Planet} , Ekliptik)					
F_{\max} :	maximaler Fehler des Modells					
	P/E	G/P	ρ	φ	ψ	F_{\max}
Merkur	0.38	0.159	200°	49°	6.70°	51'
Venus	0.71	0.019	19°	77°	3.50°	19'
Mars	1.52	0.099	105°	47°	1.83°	22'
Jupiter	5.19	0.049	92°	100°	1.30°	2'
Saturn	9.50	0.053	160°	114°	2.48°	4'

Tabelle 5: Modell: Deferenten mit Equant, Epizykel ohne Zentrumsverschiebung

Jupiter und Saturn sind in der Modellierung gutmütig wie immer. Venus und Mars sind grenzwertig, aber gerade noch akzeptabel. Der Fehler von fast einem Grad bei Merkur ist nicht hinnehmbar. Und es ist zu befürchten, dass die Berechnung gemäß (23b) für Merkur noch einen größeren Fehler ergeben würde, weil Zentrumsverschiebung und Equant gerade zur Beschreibung der stark exzentrischen Merkurbahn besonders wichtig sind.

Ptolemaios „löste“ das Problem recht hemdsärmlig dadurch, dass er für Merkur adhoc ein Spezialmodell mit einer zusätzlichen, rotierenden Zentrumsverschiebung des Deferenten kreierte.

Nun erwartet man von einer ordentlichen Theorie, dass sie mit wenigen Annahmen sehr viele Phänomene gut beschreiben kann. So wie z.B. Modell (19) die Bahnen der Sonne und aller Planeten recht gut reproduziert. Eine Sondertheorie für einen einzelnen, willkürlich und ohne plausible Begründung herausgegriffenen Planeten ist keine Theorie sondern ein Krampf, und verdient keinen weiteren Kommentar.

Aus welchem Grund hat Ptolemaios nicht versucht, Deferent *und* Epizykel mit Zentrumsverschiebung und Equant auszustatten? Schließlich haben wir beim Modell (19) gesehen, dass sich damit eine ausgezeichnete Theorie des Planetensystems konstruieren lässt. (19) kann problemlos sowohl als geozentrisches wie auch als heliozentrisches System ausformuliert werden, es ist – wie in (21) gefordert – uneingeschränkt skalierbar, es kollidiert mit keiner von Ptolemaios' grundlegenden Annahmen über den Raum und das Vakuum, die wir im Folgenden diskutieren werden. Warum hat Ptolemaios dies elegante Modell, das doch zum Greifen nahe lag, nicht genutzt?

Ich vermute, der Grund ist ziemlich banal: Ein Modell mit zwei Equanten hätte ihn schlichtweg technisch überfordert. Schließlich konnte er sich nicht wie wir bei einer Tasse Tee gemütlich entspannen, während der Computer – auf der Basis von sekundengenaue Ephemeriden – zuverlässig und fehlerfrei hunderttausende von Gleichungssystemen löst. Sondern er musste sich jeden einzelnen Parameter mit raffinierten und langwierigen geometrischen Konstruktionen erkämpfen. Wer im Almagest die oftmals quälend umständliche Beweisführung nachliest, der kann nicht anders, als über die Zähigkeit des Ptolemaios zu staunen und seine Ausdauer zu bewundern. Ein zusätzlicher Equant hätte seine Aufgabe nochmals erheblich komplizierter gemacht. Modell (23) war wohl das komplexeste, was er gerade noch bewältigen konnte.

3. Ptolemaios' dynamisches Weltmodell

Im vorigen Abschnitt haben wir Ptolemaios' Sonnen- und Planetenmodell lediglich als ein „kinematisches“ dargestellt, das die Winkel beschreibt, unter denen die Himmelskörper zu beobachten sind, aber keine Aussagen über die Kräfte macht, die das System antreiben und stabil erhalten. Ebenso haben wir uns bis jetzt nicht festgelegt hinsichtlich der in der frühen Neuzeit so erregt debattierten Frage, ob sich die Sonne um die ruhende Erde bewegt, oder die Erde um die ruhende Sonne. Ptolemaios hatte zu diesen Themen eine dezidierte Meinung, die er im *Almagest* darlegt und begründet. Seine Ansicht leitet sich aus seinen Vorstellungen über die Natur des Raumes und des Vakuums ab.

3.1. Ptolemaios' Raum

In (22) haben wir berichtet, welche Vektoren Ptolemaios als Deferenten, und welche als Epizykel betrachtete. Bei der Wahl von $k = 1$ im Modell (19) oder (23) ist dann der Deferent von Merkur und Venus mit der Sonnenposition identisch, bei $k \neq 1$ liegt er zumindest noch auf der Sichtlinie Erde-Sonne. Der Deferent von Mars, Jupiter, und Saturn ist dagegen ein unsichtbarer Punkt irgendwo im Raum, ohne Bezug zur Sonne. Dafür ist bei diesen Planeten der Vektor $k(-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}})$ des Epizykels zu jeder Zeit parallel und proportional zum Vektor Erde-Sonne. Ptolemaios erkannte diesen engen Zusammenhang von Planetenbahnen und Sonnenbahn durchaus. An zahlreichen Stellen im *Almagest* bezeichnet er $k(-\mathbf{H} - \mathbf{E}_{\text{Equant}})$ als die auf die Sonne bezogene Anomalie, $k(\mathbf{G} + \mathbf{P}_{\text{Equant}})$ als die auf den Tierkreis bezogene Anomalie.⁹

⁹ Ptolemaios unterscheidet zwischen einer „normalen“ und drei „anormalen“ Bewegungen der Gestirne:

* Die normale Bewegung ist die Rotation von -2π pro 24 Stunden um die

Wenn er den Sonnenbezug der Planetenbewegungen also völlig klar sah, warum zog er dann nicht die uns so naheliegend erscheinende Konsequenz, im Modell (21) $k = 1$ zu setzen und ein sonnenzentriertes Planetensystem zu beschreiben?

Ptolemaios hatte für die Annahme eines geozentrischen Weltbildes Gründe, die sich in der Abwägung als gewichtiger erwiesen als die genannten „sonnenbezogenen“ Indizien. Es ging ihm keineswegs nur darum, die Beobachtungswinkel γ_P^E und δ_P^E der Himmelskörper korrekt zu beschreiben. Er wollte ein mathematisches Modell finden, das die Ordnung der gesamten Welt, ihres materiellen Inhalts, und der in ihr wirkenden Kräfte korrekt und vollständig repräsentiert. Das konnte nur gelingen, wenn er das Modell der Bahnbewegungen von Sonne und Planeten in konsistenter Weise mit seinem Bild von Raum und Vakuum zusammenfügte.

Im Altertum (und bis ins 19. Jahrhundert) konnte niemand Fixsternparallaxen beobachten. Das ließ sich zwanglos erklären, wenn die Erde im Zentrum der Himmelskugel ruhte. Ptolemaios diskutiert dies Argument für das geozentrische Weltmodell im 1. Buch, 5. Kapitel des Almagest. Aber er wusste auch, dass dies Beweis-

äquatoriale Achse der Himmelskugel, die das gesamte Inventar des Universums um die im Zentrum ruhende Erde vollzieht.

Dieser normalen Bewegung sind drei anormale Bewegungen überlagert:

- * Eine Rotation der Fixsterne um die ekliptische Achse, die Ptolemaios mit $+1^\circ$ pro 100 Jahren abschätzt. Der moderne Wert für die scheinbare Rotation der Fixsterne relativ zum Frühlingspunkt aufgrund der lunisolaren Präzession der Erde ist $+1.4^\circ$ pro 100 Jahre.
- * Die „auf den Tierkreis bezogene“ Anomalie der Sonne, der Deferenten von Mars, Jupiter und Saturn, sowie der Epizykeln von Merkur und Venus, ist eine Rotation von $+2\pi$ pro Sonnen- oder Planetenjahr um bzw. näherungsweise um die ekliptische Achse.
- * Die „auf die Sonne bezogene“ Anomalie der Deferenten von Merkur und Venus, sowie der Epizykeln von Mars, Jupiter und Saturn, ist eine Rotation von $+2\pi$ pro Sonnenjahr um die ekliptische Achse.

material ziemlich schwach war und sofort hinfällig wurde, wenn das Universum deutlich größer sein sollte als im Altertum gemeinhin vermutet wurde. Schon im folgenden 6. Kapitel des 1. Buches erklärt er, dass die Erde im Verhältnis zur Entfernung der Fixsterne ein Punkt¹⁰ sei, womit er offenbar die Winzigkeit der Erde in Relation zur Ausdehnung des Weltalls betonen wollte. Deshalb waren die folgenden Überlegungen für ihn wichtiger.

Warum konnten die Planeten sich jahrtausendlang auf ihren Kreisbahnen bewegen, ohne abzustürzen? Ptolemaios erklärt das genau so, wie ein moderner Physiker begründet, warum das Elektron die elektrische Ladung $-1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ trägt, das down-Quark aber nur ein Drittel dieser Ladung. „Es ist eine Eigenschaft von Elektronen und Quarks, diese Ladung zu haben“ ist die vernünftigste Antwort, solange man nichts genaueres weiß. Wenn es aber eine Eigenschaft der Planeten war, sich auf Kreisbahnen um das Zentrum der Welt zu bewegen, dann mussten sie aus anderer Materie bestehen als irdische Dinge. Denn irdische Dinge hatten die Eigenschaft, zum Zentrum des Kosmos zu stürzen, wenn sie nicht daran gehindert wurden.

Im 1. Buch, 7. Kapitel des Almagest schreibt Ptolemaios: „Aus den Erscheinungen selbst ist offensichtlich, dass die Erde den Raum in der Mitte des Weltalls einnimmt, und dass alle schweren Körper auf sie fallen. Der Fall nach der Mitte wird deutlich dadurch

¹⁰ Archimedes zitiert im Psammites [7] den Aristarch mit den Worten, die Bahn der Erde um die Sonne stehe zur Entfernung der Fixsterne im gleichen Größenverhältnis wie der Mittelpunkt einer Kugel zur Oberfläche. Archimedes stellt sofort richtig, dass diese Aussage – wollte man sie wörtlich verstehen – natürlich Unsinn ist, weil ein Punkt keine Ausdehnung hat. Merkwürdig: Wenn bei den Alten Griechen derartige Formulierungen üblich gewesen sein sollten, um einen Größenunterschied besonders hervorzuheben, warum stolpert Archimedes dann darüber? Wenn dies aber kein üblicher Sprachgebrauch war, warum verwendet dann Ptolemaios vierhundert Jahre später die gleiche unsinnige Formulierung wieder?

bewiesen, dass [...] an jedem Punkt der [kugelförmigen] Erde die Richtung des freien Falls der schweren Körper unter allen Umständen und überall lotrecht zur Oberfläche verläuft. Aus diesem Verhalten geht klar hervor, dass diese Körper, wenn nicht die Erdoberfläche ein für sie unüberwindliches Hindernis wäre, durchaus bis zum Mittelpunkte selbst gelangen würden, weil die zum Mittelpunkt führende Gerade immer lotrecht zur Erdoberfläche steht.“

Über himmlische Materie bemerkt er dagegen im 2. Kapitel des 9. Buches: „Die scheinbaren Anomalien der fünf Wandelsterne, der Sonne, und des Mondes entstehen allesamt durch gleichförmige Bewegungen auf Kreisen, weil nur diese Bewegungen der Natur der göttlichen Wesen entsprechen, während Regellosigkeit und Ungleichförmigkeit ihnen fremd sind.“

Materie bewegt sich also gemäß ihrer Natur, es sei denn sie wird durch äußere Kräfte – beispielsweise durch die Erdoberfläche, oder durch einen Menschen der einen Stein in die Höhe hebt – daran gehindert. „Bewegung gemäß der Natur“ ist nicht auf andere Dinge bezogen, sondern auf den Raum selbst. Steine fallen nicht nach unten, weil die Erde sie per Gravitation anzieht, sondern sie fallen zum Mittelpunkt des Raumes, und die Erde tritt dabei allenfalls als Störfaktor in Erscheinung. Das Weltall kreist nicht um die Erde, sondern es kreist um das Zentrum des Raumes, wo sich beiläufig auch die Erde befindet. Die Erde befindet sich an genau dieser Stelle des Kosmos, weil sie aus Materie besteht, die sich „gemäß ihrer Natur“ zum Zentralpunkt des Raumes hinbewegt. Für Leute, die besorgt sind dass die Erde aus ihrer Position abstürzen und an der Sphäre der Fixsterne zerschellen könnte, hat Ptolemaios (Almagest, 1. Buch, 7. Kapitel) nur Hohn und Spott übrig.

Neben Bewegungen, die durch äußere Kräfte erzeugt werden, gibt es also auch „naturgemäße“, auf den Raum bezogene Bewegungen, die der Materie als innere Kräfte gewissermaßen eingepflanzt sind. Genau diese Bezeichnung „eingepflanzte Kraft“, *vis*

insita, wählt Newton in den Principia [12], Definition III: „Die vis insita der Materie ist eine Widerstandskraft, durch die jeder Körper [...] versucht, seinen gegenwärtigen Zustand beizubehalten, sei es den Zustand der Ruhe, oder den Zustand der gleichförmigen Bewegung auf einer geraden Linie. Diese Kraft [...] unterscheidet sich von der Trägheit der Masse allenfalls in der Weise, wie wir sie wahrnehmen. Aufgrund der Trägheit der Materie kann ein Körper nur mit Mühe aus seinem Zustand der Ruhe oder Bewegung entfernt werden. Deshalb kann die vis insita am passendsten Trägheitskraft genannt werden.“

Die äußere, „eingepresste Kraft“, *vis impressa*, charakterisiert Newton in Definition IV: „Die vis impressa wirkt auf den Körper ein, um seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung längs einer geraden Linie zu verändern. Diese Kraft existiert nur, solange sie wirkt. Sobald ihre Einwirkung aufhört, bleibt sie nicht mehr im Körper. Denn der Körper hält den [durch Einwirkung der vis impressa] erworbenen Zustand allein durch die Trägheitskraft aufrecht.“

Ptolemaios' „natürliche Bewegungen“ stimmen in jeder Hinsicht mit dem überein, was Newton Trägheitsbewegungen nennt, mit dem einzigen Unterschied dass Ptolemaios' Trägheitsbewegung nicht Newton's „gleichmäßige Geradeausbewegung“, sondern – für irdische Materie – die Bewegung zum Zentrum des Raumes, und – für himmlische Materie – die kreisförmige Bewegung um das Zentrum des Raumes ist. Wie für Trägheitsbewegungen charakteristisch, und im Einklang mit Newton's Trägheitsgesetz, sind für diese Bewegungen keine äußeren Kräfte erforderlich. Im Gegenteil, damit die Trägheitsbewegung dauerhaft fortgesetzt werden kann, darf die Materie nicht von äußerlich einwirkenden Kräften gezwungen werden ihren Bewegungszustand zu ändern.

Ptolemaios' Weltsystem ist ein vollständiges, dynamisches Modell, nicht nur ein kinematisches. Es berücksichtigt alle Kräfte die

notwendig sind, um das System in Bewegung zu halten. Nur Trägheitskräfte sind erforderlich, Gravitation oder sonstige Fernwirkungen werden nicht gebraucht. Trägheitskräfte bewirken, dass die Erde stabil im Zentrum des Kosmos ruht, Trägheitskräfte stabilisieren die Kreisbewegungen der Himmelskörper um das Zentrum.

Hätte Ptolemaios auch ein heliozentrisches Weltmodell widerspruchsfrei begründen können? Im heliozentrischen Weltmodell ruhte die Sonne im Zentrum des Kosmos, und die Erde kreiste – wie schon von Aristarch vorgeschlagen – gemeinsam mit den anderen Planeten um das Zentrum. Das erzwang eine veränderte Vorstellung von der natürlichen Bewegung irdischer Materie. Denn wenn man auf der Erde einen Gegenstand hochhob und losließ, dann setzte er sich nicht in Richtung Sonne und Zentrum des Raumes in Bewegung, sondern stürzte wie eh und je in Richtung Erdzentrum hinab. Fluchtpunkt irdischer Materie war im heliozentrischen System also nicht der Mittelpunkt des Kosmischen Raumes, sondern der Mittelpunkt der Erde, und der war kein Punkt *des* Raumes, sondern ein Punkt *im* Raum, der um das Zentrum des Raumes kreiste. Die Bewegung irdischer Materie musste also auf einen im Raum beweglichen Punkt bezogen werden, nicht auf den Raum selbst. Damit war sie aber überhaupt keine Trägheitsbewegung. Es musste eine äußere Kraft eingeführt werden, um die Bewegung irdischer Materie zum Zentrum der Erde zu begründen.

Und anders als die Planeten konnte die Erdkugel nicht in einer Trägheitsbewegung um das Zentrum des Raumes rotieren, da ja die natürliche Bewegung aller ihrer Bestandteile offensichtlich eine andere war. Nochmals war eine äußere Kraft erforderlich, welche die Erde um das Zentrum des Kosmos bewegte.¹¹ Die Aufgabe, diese äußeren Kräfte zusätzlich in sein Weltmodell einzufügen, hätte Ptolemaios weitere, riesige Probleme aufgebürdet. Keine attrak-

¹¹ Es war ein Geniestreich Newtons, die beiden äusseren Kräfte zu einer einzigen zusammenzufassen.

tive Alternative zu seinem geozentrischen System, das mit Trägheitskräften allein auskam.¹²

Auch Tycho Brahes System – am Ende des 16. Jahrhunderts als eine Art Kompromiss zwischen geozentrischem Weltbild und heliozentrischem Planetensystem konstruiert – in dem er die Erde unbeweglich im Zentrum des Kosmos beließ, das Zentrum der Planetensphären aber in die Sonne verlegte, hätte Ptolemaios wohl nicht überzeugen können. Denn im Tychonischen System war mit der Sonne wieder ein Punkt *im* Raum statt ein Punkt *des* Raumes Zentralpunkt der Planetenbewegung. Die Bewegung der Planeten war also keine Trägheitsbewegung, sondern erforderte auch in diesem System eine äußere Kraft.

Johannes Kepler sah völlig klar, dass ein heliozentrisches System nicht ohne äußere Kräfte konstruiert werden kann. In Kapitel 33 der *Astronomia Nova* [11] spekuliert er ausgiebig über mögliche magnetische Anziehungskräfte zwischen Sonne und Planeten. Denn die magnetische Kraft, 1600 von Gilbert in *De Magnete* [13] beschrieben, war die einzige damals bekannte Kraft, die auf unsichtbarer Fernwirkung beruhte.

3.2. Ptolemaios' Vakuum

Ob es einen leeren Raum geben kann, das war und blieb immer umstritten. Es geht bei dieser Frage nicht um ein technisches, sondern ein begriffliches Problem. Wir haben uns so daran gewöhnt, Punkte oder Bereiche im Raum durch Koordinaten zu definieren, dass uns oft kaum noch bewusst ist, wie abstrakt diese Begriffsbildung

¹² Es wird ja wohl niemand im Ernst fragen, warum Ptolemaios nicht die Allgemeine Relativitätstheorie vorwegnahm, die das Sonnensystem doch mit Trägheitskräften allein beschreiben kann. Selbstverständlich lag das weit außerhalb von Ptolemaios' Reichweite. Sein System musste im Rahmen der Euklidischen Geometrie formulierbar sein. Unter dieser Voraussetzung gilt die im Text getroffene Feststellung.

wirklich ist. Das Problem wird sofort klarer, wenn man Christian Morgensterns Gedicht vom Lattenzaun mit Zwischenraum liest.¹³ Es erscheint uns selbstverständlich, dass der Zwischenraum durch das definiert wird, zwischen dem er sich befindet, und nicht getrennt davon gedacht werden kann. Ebenso selbstverständlich und denknotwendig erschien es einer bis in die Neuzeit einflussreichen Schule in der Tradition des Aristoteles, dass der Raum sinnvoll nur durch das definiert werden könne, was sich in ihm befindet, und dass die Vorstellung von einem Raum ohne Inhalt schon in sich selbst widersinnig und begrifflicher Unfug sei.

Ptolemaios glaubte nicht an die Denkbarkeit eines leeren Raumes, sondern war überzeugt dass der gesamte Kosmos immer und überall mit Irgendetwas gefüllt sei. Deshalb schien ihm eine Erklärung dafür erforderlich zu sein, dass die Planeten nicht von dem Fluidum, durch das sie sich bewegten, abgebremst wurden. Zwar war von der Erde aus nichts in der Umgebung der Planeten zu sehen, was durch Reibung oder dergleichen ihren Lauf hätte stören können. Aber das bedeutete keineswegs dass die Umgebung der Planeten leer war. Schließlich war auch Luft unsichtbar, und konnte trotzdem ein Segelschiff recht wirksam antreiben oder bremsen.

Wenn dieses Etwas den Lauf der Sonne und der Planeten nicht bremste, dann war das am einfachsten und natürlichsten damit erklärt, dass es sich in gleicher Richtung und mit gleicher Geschwindigkeit wie die Himmelskörper selbst bewegte. Das wiederum würde dieses Etwas dann tun, wenn es seiner Natur entspräche. Genau so verhielt es sich nach Ptolemaios' Ansicht. Im *Almagest*, 1. Buch,

¹³ Es war einmal ein Lattenzaun, mit Zwischenraum, hindurchzuschauen.
Ein Architekt, der dieses sah, stand eines Abends plötzlich da –
und nahm den Zwischenraum heraus und baute draus ein großes Haus.
Der Zaun indessen stand ganz dumm, mit Latten ohne was herum.
Ein Anblick grässlich und gemein. Drum zog ihn der Senat auch ein.
Der Architekt jedoch entfloh nach Afri- od- Ameriko.

Aus den Galgenliedern von Christian Morgenstern [14]

3. Kapitel stellt er fest: „Die Natur hat alle irdischen und vergänglichen Körper aus kreisförmigen, jedoch ungleichartigen Molekülen geschaffen, dagegen alle im Äther sich bewegenden und göttlichen Körper aus gleichartigen Molekülen von Kugelform. [...] Deshalb bewegt sich verständlicherweise auch der sie umgebende Äther, welcher von gleichartiger Natur ist und aus gleichartigen Molekülen besteht, mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf kreisförmiger Bahn.“

Es musste so viele verschiedene Fluida geben, wie es Himmelskörper gibt. Denn die Himmelskörper bewegten sich ja unterschiedlich schnell. War ihre Bewegung eine Eigenschaft der Materie, aus der sie zusammengesetzt waren, so bestand folglich jeder Himmelskörper aus einer eigenen Sonderform von himmlischer Materie, und war von Fluidum seiner jeweils eigenen Materieart umgeben. Es entstände eine kosmische Katastrophe, wenn die verschiedenen Fluida ineinander strömen und sich vermischen würden. Ptolemaios stellte sich die Sphären der Himmelskörper als Kugelschalen vor, die die Erde konzentrisch umgaben. Sonne und Planeten hatten ihre jeweils eigenen Sphären, in der sie sich mitsamt des sie umgebenden Fluidums ungestört gemäß ihrer Natur – sprich den Trägheitskräften folgend – bewegen konnten.

Dass das möglich ist, versteht sich keineswegs von selbst. Nach heutiger Kenntnis sind nicht nur Merkur und Venus der Erde manchmal näher, manchmal ferner als die Sonne. Auch Mars ist in Opposition weniger als 0.7 AU von der Erde entfernt. Das bedeutet, dass die Sphären sich durchdringen. Eine für Ptolemaios inakzeptable Vorstellung. Das Problem ist sofort elegant gelöst, wenn nicht die Erde, sondern die Sonne im Zentrum der Planetensphären steht. Die aus Ptolemaios' Verständnis des Vakuums folgende Notwendigkeit, die Sphären der Himmelskörper zu trennen, erweist sich als starkes Argument für ein heliozentrisches Weltbild.

Ptolemaios war zwischen Skylla und Charybdis geraten: Sein

Raumkonzept hatte ihn zu einem geozentrischen Weltmodell gezwungen. Seine Vorstellung vom Vakuum drängte ihn zum heliozentrischen System. Aber es gab einen Ausweg: Die Skalenfaktoren k des Modells (21)! Durch geeignete Wahl der k ließ sich auch im geozentrischen Modell die kosmische Katastrophe abwenden.

Ptolemaios macht keine präzisen Angaben, wie die k zu wählen sind, aber er gibt im 1. Kapitel des 9. Buches klare Richtlinien vor. Demnach sind Merkur und Venus zwischen Mond und Sonne anzuordnen. Mars, Jupiter und Saturn werden zwischen Sonne und Fixsternen eingefügt. Außerdem ist darauf zu achten, dass Merkur und Venus der Erde nicht so nahe kommen, dass Parallaxen messbar werden könnten.

Die letzte Anweisung ist wichtig, und verdient genauere Beachtung. Wir berechnen A_{\max} , den maximalen Abstand, den man in der Antike, bei einer Ungenauigkeit der Winkelmessung von etwa $20'$, gerade noch trigonometrisch ermitteln konnte. Die maximale Basislänge der Triangulation ist 2 mal der Erdradius R , also folgt für den Abstand:

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot R}{A_{\max}} &\approx 20' \\ A_{\max} &= \frac{2 \cdot R}{20'} \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 344 R \approx 0.015 \text{ AU} \end{aligned} \quad (24)$$

Der Mond war also leicht zu triangulieren, Ptolemaios gibt seinen Abstand mit $59R$ an (der moderne Wert ist knapp $60R$). An eine Triangulation der Sonne war nicht zu denken. Man behalf sich mit anderen Methoden, etwa der Messung des Winkels zwischen Sonne und Mond bei Halbmond, oder insbesondere mit der genauen Analyse von Sonnen- und Mondfinsternissen. Weil dabei aber die Messung sehr spitzer Winkel erforderlich ist, führten bereits kleinste Ungenauigkeiten der Winkelmessungen zu riesigen Fehlern der Abstandsmessung. Eine Beschreibung der Methoden, die

altgriechische Astronomen zur Ermittlung der Abstände der Himmelskörper anwandten, und eine Übersicht ihrer Ergebnisse, findet man in [15].

Ptolemaios schätzt (Almagest, 15.Kapitel im 5.Buch) den Abstand zwischen Erde und Sonne (heutzutage als Astronomische Einheit AU bezeichnet) mit 1210 Erdradien ab. Das ist weniger als 1/19 des modernen Wertes. Wir erwähnen dies, weil es zu einer Unstimmigkeit im Weltmodell führt.

$$1 \text{ AU}_{\text{Ptolemaios}} = 1210 \text{ Erdradien} \quad (25a)$$

$$1 \text{ AU}_{\text{modern}} = 23\,481 \text{ Erdradien} \quad (25b)$$

Wir berechnen zunächst das Weltmodell des Ptolemaios mit dem modernen Wert (25b) der Astronomischen Einheit. Dabei achten wir darauf, in allen Sphären hinreichend Platz – plus etwas Toleranz – für die Epizykel und Zentrumsverschiebungen der Modelle (14) und (19) (siehe Tabelle 3) vorzusehen, und berechnen passende k-Faktoren. Das Ergebnis steht in Tabelle 6. Ptolemaios legt sich nicht fest, ob auch für die Fixsterne eine Sphäre endlicher Dicke einzurichten ist, oder ob sie ohne räumliche Ausdehnung an der Außenwand des Kosmos fixiert sind. Mangels jeglicher Anhaltspunkte dafür, wie dick die Fixsternsphäre zu dimensionieren wäre, entscheiden wir uns für die zweite Möglichkeit.

Während die Sphären der Sonne und der Planeten einigermaßen sparsam dimensioniert sind und nicht wesentlich kleiner sein dürfen, wenn das Weltgetriebe nicht verklemmen soll, ist die Mondsphäre weit überdimensioniert. Eine Sphäre mit Innenradius 0.002 AU und Außenradius 0.003 AU hätte leicht ausgereicht, um den Mond samt Zentrumsverschiebung seiner Kreisbahn unterzubringen. Aber der Raum zwischen Mond und Merkur durfte nicht leer bleiben, ohne Ptolemaios' Vakuum-Verständnis zu verletzen.

Bemerkenswerterweise ist zwischen Mond und Merkur aber *nur deshalb* soviel Platz, weil wir für die Astronomische Einheit den

k:	Skalenfaktor von Modell (21)			
I:	Innenradius der Sphäre / AU			
A:	Außenradius der Sphäre / AU			
A-I:	Dicke der Sphäre / AU			
	k	I	A	A-I
Erde		0	0.000043	
Athmosphäre		0.000043	0.002	0.002
Mondsphäre		0.002	0.031	0.029
Merkursphäre	0.08	0.031	0.13	0.099
Venussphäre	0.55	0.13	0.965	0.835
Sonnensphäre	1	0.965	1.035	0.07
Marssphäre	2.52	1.035	6.64	5.605
Jupitersphäre	1.61	6.64	10.1	3.46
Saturnsphäre	1.2	10.1	13	2.9
Fixsternsphäre		13		

Tabelle 6: Aufbau und Größe des Ptolemäischen Kosmos

modernen Wert (25b) eingesetzt haben. Hätten wir Ptolemaios's eigenen Wert (25a) verwendet, dann wäre eine Überlappung von Mondsphäre und Merkursphäre unvermeidlich gewesen! Hätte Ptolemaios sein eigenes Modell wirklich zu Ende gerechnet, statt nur die Anweisung „Merkur und Venus zwischen Mond und Sonne einfügen“ zu geben, dann hätte er seinen Fehler bei der Abschätzung der Astronomischen Einheit bemerkt.

Der Ptolemäische Kosmos hat also die Gestalt einer Kugel mit Radius 13 AU. Schon Uranus mit seinem Bahnradius von etwa 19 AU hätte ihn gesprengt.

4. Nachbemerkung

Ptolemaios konnte ein Weltmodell formulieren, das mit seinen grundlegenden Annahmen über den Raum und das Vakuum im

Einklang stand. Ehrlicher Weise muss man aber zugeben dass ihm das nur deshalb gelang, weil er an entscheidenden Punkten sehr dehnbare Begriffe verwendete.

So verkaufte er beispielsweise die Bewegung der Planeten – auf zentrumsverschobenen Kreisen mit ungleichmäßiger, von Equanten gesteuerter Geschwindigkeit – als „natürliche Bewegung“, was wir als Trägheitsbewegung interpretiert haben. Es würde uns wesentlich leichter fallen, eine Theorie des Raumes als plausibel anzuerkennen, in der die Mittelpunkte der kreisförmigen Trägheitsbahnen mit dem Zentrum des Raumes identisch wären, und in der diese Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen würden. Wenn Ptolemaios als einzige Erklärung für die recht komplexen Bewegungsformen der Himmelskörper anbietet, dies seien Bewegungen „gemäß der Natur“, dann hat man doch den Eindruck dass er das Problem eher unter den Teppich gekehrt als gelöst hat.

Auch seine Theorie der natürlichen Bewegung irdischer Materie zum Zentralpunkt des Kosmos lebt davon, dass er sie im Zweifelsfall sehr flexibel auslegt. Was ist mit einem geworfenen Stein? Warum bewegt er sich auf einer parabelförmigen Flugbahn, statt seiner Natur folgend schnurstracks den Weg in Richtung Mittelpunkt des Raumes einzuschlagen?

Darüber hinaus war den antiken Astronomen wohlbekannt, dass die Planeten zu verschiedenen Zeiten deutlich unterschiedlich hell erschienen. Als Erklärung bot sich an, dass die Abstände zwischen Planeten und Erde wesentlich stärker variierten, als mit Ptolemaios' Konzept der Trennung der Sphären – das wiederum aus seiner Vorstellung vom Vakuum resultierte – verträglich. Ptolemaios hat diese Unklarheit im Almagest schlichtweg ignoriert.

Diese kritischen Anmerkungen können unsere Hochachtung vor Ptolemaios' wissenschaftlicher Leistung aber nicht ernsthaft be-

einträchtigen. Es ist wirklich eindrucksvoll zu sehen, zu welchen Leistungen die antike Griechische Astronomie fähig war. Und es sollte uns sehr nachdenklich und betroffen machen, dass – teils aus Gleichgültigkeit und Dummheit, teils getrieben von fundamentalistisch-religiösen Wahnvorstellungen – die Erkenntnisse der Wissenschaft im spätantiken Europa fast ausgelöscht wurden, und ein ganzer Kontinent für mehr als tausend Jahre in kollektive Infantilität zurückfiel. Nach der Übersetzung des Almagest aus dem Arabischen durch Gerard von Cremona dauerte es nochmals mehr als 400 Jahre, bis es – mit Tycho Brahe, Johannes Kepler, Galileo Galilei – endlich wieder europäische Astronomen gab, die sich mit Ptolemaios' wissenschaftlichem Erbe „auf Augenhöhe“ auseinandersetzen konnten.

A. Anhang

A.1. Referenzdaten

Für die Sonne und jeden Planeten verwenden wir mindestens 12 Ephemeriden im Abstand von jeweils etwa 1/12 Planetenjahr. Für sonnennahe Planeten müssen die Ephemeriden darüberhinaus mindestens ein Erdjahr abdecken, damit man den Planeten nicht „nur von einer Seite“ sieht, sondern ein wirklich repräsentatives Ergebnis erhält. Dies sind die Referenzdaten:

- * Sonne: 12 Ephemeriden im Abstand von jeweils etwa 1/12 Erdjahr zwischen dem 1. Jan. 2008 und dem 1. Dez. 2008
- * Merkur: 50 Ephemeriden im Abstand von jeweils etwa 1/12 Merkurjahr zwischen dem 1. Jan. 2008 und dem 25. Dez. 2008
- * Venus: 20 Ephemeriden im Abstand von jeweils etwa 1/12 Venusjahr zwischen dem 1. Jan. 2008 und dem 21. Dez. 2008
- * Mars: 20 Ephemeriden im Abstand von jeweils etwa 1/12 Marsjahr zwischen dem 1. Jan. 2008 und dem 23. Dez. 2010
- * Jupiter: 12 Ephemeriden im Abstand von jeweils 1 Erdjahr zwischen dem 1. Jan. 1997 und dem 1. Jan. 2008
- * Saturn: 12 Ephemeriden im Abstand von jeweils 1.5 Erdjahren zwischen dem 1. Jan. 1981 und dem 1. Jan. 2008

Die Ephemeriden für Sonne, Merkur, Venus, und Mars stammen von der Website des US Naval Observatory:

<http://www.usno.navy.mil/USNO/astronomical-applications/data-services/geo-pos>

Weil dort nur Ephemeriden für drei Jahre angeboten werden, besorgen wir uns die Ephemeriden für Jupiter und Saturn bei Christian Zielinski: <http://ephemeriden.com/planets.py>

A.2. Berechnung der Winkel

Die folgende Berechnung der Winkel γ_P^E und δ_P^E gilt gleichermaßen für Gleichung (9) des einfachen Kreismodells, für Gleichung (16) des Modells mit Zentrumsverschiebung, und für Gleichungen (19) und (20) des Modells mit Equanten. Im Fall der Berechnung von (9) ist durchwegs $H \equiv G \equiv 0$ einzusetzen.

Wir schreiben die Gleichung in kartesischen Koordinaten auf, und kürzen die drei Komponentengleichungen durch E:

$$\begin{aligned} (P_X^E/E) &= (P^E/E) \cdot \cos \delta_P^E \cdot \cos \gamma_P^E \\ &= -\cos \gamma_E - (H/E) \cdot \cos \gamma_H + (G/E) \cdot \cos \delta_G \cdot \cos \gamma_G \\ &\quad + (P/E) \cdot \cos \delta_P \cdot \cos \gamma_P \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} (P_Y^E/E) &= (P^E/E) \cdot \cos \delta_P^E \cdot \sin \gamma_P^E \\ &= -\sin \gamma_E - (H/E) \cdot \sin \gamma_H + (G/E) \cdot \cos \delta_G \cdot \sin \gamma_G \\ &\quad + (P/E) \cdot \cos \delta_P \cdot \sin \gamma_P \end{aligned} \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} (P_Z^E/E) &= (P^E/E) \cdot \sin \delta_P^E \\ &= (G/E) \cdot \sin \delta_G + (P/E) \cdot \sin \delta_P \end{aligned} \quad (26c)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} A &\equiv -\cos \gamma_E - (H/E) \cdot \cos \gamma_H + (G/E) \cdot \cos \delta_G \cdot \cos \gamma_G \\ &\quad + (P/E) \cdot \cos \delta_P \cdot \cos \gamma_P \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} B &\equiv -\sin \gamma_E - (H/E) \cdot \sin \gamma_H + (G/E) \cdot \cos \delta_G \cdot \sin \gamma_G \\ &\quad + (P/E) \cdot \cos \delta_P \cdot \sin \gamma_P \end{aligned} \quad (27b)$$

$$C \equiv (G/E) \cdot \sin \delta_G + (P/E) \cdot \sin \delta_P \quad (27c)$$

lassen sich die Winkel γ_P^E und δ_P^E aus (26) extrahieren, indem man die Komponentengleichungen wechselweise durcheinander teilt. Dabei sind Fallunterscheidungen zu treffen, damit man nicht durch

Null teilt, damit die Gleichungen nicht aufgrund sehr kleiner Nenner numerisch instabil werden, und damit man den vieldeutigen Arkusfunktionen die richtigen Winkel zuweist:

$$\gamma_{\text{P}}^{\text{E}} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{B}{A}\right) & \text{falls } A^2 \geq B^2 \text{ und } A \geq 0 \text{ und } B \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{B}{A}\right) + \pi & \text{falls } A^2 \geq B^2 \text{ und } A < 0 \\ \arctan\left(\frac{B}{A}\right) + 2\pi & \text{falls } A^2 \geq B^2 \text{ und } A \geq 0 \text{ und } B < 0 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{A}{B}\right) & \text{falls } A^2 < B^2 \text{ und } B \geq 0 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{A}{B}\right) + \pi & \text{falls } A^2 < B^2 \text{ und } B < 0 \end{cases} \quad (28)$$

$$\delta_{\text{P}}^{\text{E}} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{C}{A} \cos \gamma_{\text{P}}^{\text{E}}\right) & \text{falls } A^2 \geq B^2 \\ \arctan\left(\frac{C}{B} \sin \gamma_{\text{P}}^{\text{E}}\right) & \text{falls } A^2 < B^2 \end{cases} \quad (29)$$

Man muss also zunächst (28) berechnen, damit man $\gamma_{\text{P}}^{\text{E}}$ in (29) einsetzen und $\delta_{\text{P}}^{\text{E}}$ berechnen kann. Die in (27) benötigten Sonnenwinkel ¹⁴ γ_{E} werden mithilfe des jeweiligen Sonnenmodells berechnet, also mithilfe von (7) für das einfache Kreismodell, mithilfe der Tabelle 2 zugrundeliegenden Sonne/Erde-Parameter für das Modell mit Zentrumsverschiebung ohne Equant, und mithilfe der Tabelle 3 zugrundeliegenden Sonne/Erde-Parameter für das Modell mit Equant.

¹⁴ Genauer gesagt handelt es sich bei den γ_{E} um die Winkel, unter denen die Erde von der Sonne aus sichtbar ist.

A.3. Die Länge der Jahreszeiten 2008/09

Frühlingsbeginn	20.März 2008	5h:48m:14s
Dauer des Frühlings 2008	92 Tage	18h:11m:06s
Sommersonnenwende	20.Juni 2008	23h:59m:20s
Dauer des Sommers 2008	93 Tage	15h:45m:02s
Herbstbeginn	22.Sep. 2008	15h:44m:22s
Dauer des Herbstes 2008	89 Tage	20h:19m:21s
Wintersonnenwende	21.Dez. 2008	12h:03m:43s
Dauer des Winters 2008/09	88 Tage	23h:39m:49s
Frühlingsbeginn	20.März 2009	11h:43m:32s
Dauer des Jahres 2008/09	365 Tage	5h:55m:18s

Das Tropische Jahr 2008/2009 war also um 6 Minuten und 33 Sekunden länger als das definierte Mittlere Tropische Jahr, siehe Gleichung (6). Abweichungen der tropischen Jahreslänge vom Mittelwert in dieser Größenordnung sind durchaus normal.

A.4. Rotationsgeschwindigkeit mit Equant

Aus Abbildung 5 lässt sich erschließen, wie $\zeta(t)$ von $\beta(t)$ abhängt. Erstens summieren sich die Innenwinkel eines Dreiecks zu π , deshalb gilt :

$$\left. \begin{aligned} \zeta + (\pi - \beta) + \gamma &= \pi \\ \zeta &= \beta - \gamma \end{aligned} \right\} \text{ falls } 0 \leq \beta \leq \pi \quad (30a)$$

$$\left. \begin{aligned} (2\pi - \zeta) + (\beta - \pi) + \gamma &= \pi \\ \zeta &= \beta + \gamma \end{aligned} \right\} \text{ falls } \pi < \beta \leq 2\pi \quad (30b)$$

Zusätzlich erhält man mit dem Sinussatz

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{G} &= \frac{\sin(\pi - \beta)}{P} \\ \sin \gamma &= \frac{G}{P} \cdot \sin \beta \\ \gamma &= \arcsin \left\{ \frac{G}{P} \cdot \sin \beta \right\} \end{aligned} \right\} \text{ falls } 0 \leq \beta \leq \pi \quad (31a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \gamma}{G} &= \frac{\sin(\beta - \pi)}{P} \\ \sin(-\gamma) &= \frac{G}{P} \cdot \sin \beta \\ -\gamma &= \arcsin \left\{ \frac{G}{P} \cdot \sin \beta \right\} \end{aligned} \right\} \text{ falls } \pi < \beta \leq 2\pi \quad (31b)$$

Einsetzen von (31a) in (30a) bzw. von (31b) in (30b) ergibt für beliebiges β :

$$\zeta(t) = \beta(t) - \arcsin \left\{ \frac{G}{P} \cdot \sin \beta(t) \right\} \quad (20a)$$

Literatur

- [1] Claudios Ptolemaios: *Almagest, Vol. I & II*
(Henri Grand, Paris, 1813 & 1816) Griechischer Text und französische Übersetzung von Nicolas Halma. <http://www.blumaise.org/blog/archives/2006/08/lalmageste.html>
- [2] Claudius Ptolemaeus: *Syntaxis Mathematica, Vol. I & II*
(B. G. Teubner, Leipzig, 1898) Griechischer Text, herausgegeben von J. L. Heiberg. Volume I: <http://www.wilbourhall.org/millionbookspdfs/pt1claudiptolemaei01ptoluoft.pdf>
Volume I & II: <http://www.wilbourhall.org/pdfs/HeibergAlmagestComplete.pdf>

- [3] Claudios Ptolemaios: *Handbuch der Astronomie, Vol. I & II* (B. G. Teubner, Leipzig, 1912)
Deutsche Übersetzung des Almagest aus dem Griechischen von Karl Mantius.
<http://www.wilbourhall.org/index.html#ptolemy>
- [4] Claudios Ptolemaios: *Almagest*
(Peter Liechtenstein, Venedig, 1515) Lateinische Übersetzung aus Arabischen Manuskripten um 1175 durch Gerard von Cremona. http://www.univie.ac.at/hwastro/rare/1515_ptolemae.htm
- [5] Johannes de Sacrobosco: *Tractatus de Sphaera*
(Wittenberg, 1540) http://mdz10.bib-bvb.de/zend-bsb/pdf_download.pl?id=00032845&nr=2
- [6] Georg von Peurbach: *Novae Theoricae Planetarum*
(Wittenberg, 1535) http://mdz10.bib-bvb.de/zend-bsb/pdf_download.pl?id=00033025&nr=1
- [7] Archimedes: *Psammites*. in: *Opera Omnia*
Editor: I.L.Heiberg (B. G. Teubner, Stuttgart, 1972)
<http://www.lix.polytechnique.fr/Labo/Ilan.Vardi/psammites.ps> Annotated english translation:
[http://www.calstatela.edu/faculty/hmendel/Ancient Mathematics/Archimedes/SandReckoner/SandReckoner.html](http://www.calstatela.edu/faculty/hmendel/AncientMathematics/Archimedes/SandReckoner/SandReckoner.html)
- [8] *Rotationen und Translationen*, APIN Mtlg. sd97211 (2010)
<http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd97211.pdf>
- [9] Oliver Montenbruck: *Grundlagen der Ephemeridenrechnung*
(Elsvier Spektrum Verlag, Heidelberg, 2005)
- [10] Dennis Duke: *The Equant in India: the Mathematical Basis of Ancient Indian Planetary Models*
(Florida State University, 2005)
<http://people.sc.fsu.edu/~dduke/india8.pdf>

- [11] Johannes Kepler: *Astronomia Nova*
(Verlag Gotthard Vögelin, Heidelberg, 1609)
Nachdruck in Kepler: *Gesammelte Werke Band 3*
(Verlag C. H. Beck, München, 1938)
- [12] Isaac Newton:
Philosophiae Naturalis Principia Mathematica
(Guil. & Joh. Innys, London, 3rd Edition 1726)
<http://gdz.sub.uni-goettingen.de/> Nach „Isaac
Newton“ suchen, nicht nach „Principia“ oder dergl
- [13] William Gilbert: *De Magnete* (Hallervorden, Rostock, 1628)
<http://diglib.hab.de/drucke/nc-4f-46/start.htm>
- [14] Christian Morgenstern: *Alle Galgenlieder*
(Insel Verlag, Frankfurt am Main, 1972)
- [15] Aristarch.
Περί Μεγεθων και Αποστηματος Ηλιου και Σεληνης. in:
Aristarchus of Samos (Editor: Thomas Heath). Clarendon
Press, Oxford, 1913. Greek text (30 pages) and english
translation (30 pages), with commentaries (50 pages), and a
general overview on ancient greek astronomy from the
beginnings to Aristarch (300 pages).
<http://ia301504.us.archive.org/1/items/aristarchusofsam00heatuoft/aristarchusofsam00heatuoft.pdf>