

## Sudoku

Seit wann gibt es Sudokus? Wer hat sie erfunden? Wie viele verschiedene Sudokus gibt es? Wie werden Sudokus erzeugt? Diese Mitteilung enthält einige (nicht sehr tief schürfende) Überlegungen zu dieser populären Art von Denksport-Aufgaben.

### 1. Wer hat das Sudoku erfunden?

Besondere Arten der Anordnung von Zahlen in „magischen“ Quadraten haben die Menschen schon seit Jahrhunderten fasziniert. Der Kupferstich "Melancholia I" von Albrecht Dürer aus dem Jahr 1514 ist ein berühmtes Beispiel. Man sieht rechts oben unter der Glocke ein magisches Quadrat aus 4x4 Zahlen. (Weil es in diesem Druck schlecht erkennbar ist, ist es unten nochmal vergrößert abgedruckt.) Die Zahlen in jeder Reihe, in jeder Spalte,



in jeder Diagonalen, in den  $2 \times 2$  Quadranten aller vier Ecken, und in den vier Feldern in den Ecken, ergeben immer die gleiche Summe: 34

Direktere Vorläufer des Sudoku waren die „Lateinischen Quadrate“, mit denen Leonhard Euler (1707 – 1783) sich im 18. Jahrhundert intensiv befasste. Sie bekamen ihren Namen dadurch, dass Euler nicht Zahlen, sondern die Buchstaben des lateinischen Alphabets in die Quadrate eintrug. Ein Quadrat mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten wird als Quadrat der Ordnung  $n$  bezeichnet.

Euler suchte nach der Antwort auf folgende Frage: Wie viele verschiedene Lateinische Quadrate der Ordnung  $n$  kann man bilden, wenn jeder Buchstabe aus einer Gruppe von  $n$  verschiedenen Buchstaben in jeder Zeile und in jeder Spalte des Quadrats genau 1 mal vorkommen muß?

Ein Lateinisches Quadrat der Ordnung 1 ist ziemlich langweilig: In seiner 1 Zeile und 1 Spalte kann man einen Buchstaben in genau einer Weise anordnen:

A
---

Lateinische Quadrate der Ordnung 2 sind nur geringfügig interessanter:

A	B	B	A
B	A	A	B

Beim Befüllen des Quadrats hat man die freie Wahl, ob man den Buchstaben A in der ersten Zeile links anordnen will (so wurde es beim linken Quadrat gemacht), oder rechts (so wurde es beim rechten Quadrat gemacht). Nachdem diese Entscheidung getroffen wurde, ergeben sich die Positionen der grünen Buchstaben zwangsläufig. Es gibt also genau 2 verschiedene Lateinische Quadrate der Ordnung 2.

Interessanter wird es allmählich bei Lateinischen Quadraten der Ordnung 3:

A	B	C	A	B	C	B	A	C	B	A	C	B	C	A	B	C	A
C	A	B	B	C	A	A	C	B	C	B	A	A	B	C	C	A	B
B	C	A	C	A	B	C	B	A	A	C	B	C	A	B	A	B	C
A	C	B	A	C	B	C	A	B	C	A	B	C	B	A	C	B	A
B	A	C	C	B	A	A	B	C	B	C	A	A	C	B	B	A	C
C	B	A	B	A	C	B	C	A	A	B	C	B	A	C	A	C	B

Man kann das A in der ersten Zeile links, oder in der Mitte, oder rechts anordnen: 3 Möglichkeiten. Anschließend gibt es 2 verschiedene Möglichkeiten das A in der zweiten Zeile anzuordnen, und schließlich 2 verschiedene Möglichkeiten, das B in der ersten Zeile anzuordnen. Nachdem diese Festlegungen getroffen wurden, ergeben sich die Positionen der grünen Buchstaben zwangsläufig. Also gibt es genau

$$3 \times 2 \times 2 = 12$$

unterschiedliche Lateinische Quadrate der Ordnung 3.

Bei größeren Quadraten wird es schnell sehr mühsam und aufwändig die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten dadurch zu ermitteln, dass man sämtliche möglichen Varianten explizit aufschreibt. Was Euler eigentlich suchte war eine allgemeine Formel, mit der man die Anzahl verschiedener Lateinischer Quadrate beliebiger Ordnung  $n$  berechnen kann, ohne diese Quadrate tatsächlich aufschreiben zu müssen. So eine Formel hat Euler nicht gefunden, und das ist bis auf den heutigen Tag auch niemand anderem gelungen. Das beste, was die Mathematiker herausfinden konnten, waren Formeln für untere und obere Grenzen dieser Zahl. Sie konnten nämlich beweisen, dass die Anzahl  $L(n)$  unterschiedlicher Lateinischer Quadrate der Ordnung  $n$  im Bereich

$$\frac{(n!)^{2n}}{n^{n \cdot n}} \leq L(n) \leq \prod_{k=1}^n (k!)^{n/k}$$

liegen muss. Probieren wir diese Formel für die neun kleinsten Lateinischen Quadrate aus:

$$1 \leq L(1) \leq 1$$

$$1 \leq L(2) \leq 2$$

$$3 \leq L(3) \leq 16$$

$$26 \leq L(4) \leq 1\,046$$

$$2\,078 \leq L(5) \leq 714\,396$$

$$1\,881\,677 \leq L(6) \leq 7\,621\,831\,476$$

$$2.656 \cdot 10^{10} \leq L(7) \leq 1.70412 \cdot 10^{15}$$

$$7.7727 \cdot 10^{15} \leq L(8) \leq 1.03026 \cdot 10^{22}$$

$$6.0547 \cdot 10^{22} \leq L(9) \leq 2.11023 \cdot 10^{30}$$

Wir haben oben durch explizite Konstruktion

$$L(1) = 1, \quad L(2) = 2, \quad L(3) = 12$$

gefunden, was mit der allgemeinen Formel verträglich ist. Man erkennt, dass die Ermittlung von  $L(n)$  für  $n > 3$  durch explizite Konstruktion eine Aufgabe für Masochisten ist, und ohne Hilfe von Computern spätestens für  $n > 5$  ziemlich hoffnungslos wird. Mithilfe beträchtlicher Computer-Power berechneten Bammel und Rothstein [1]

$$L(9) = 5\,524\,751\,496\,156\,892\,842\,531\,225\,600 \approx 5.525 \cdot 10^{27}.$$

Es war Howard Garns (1905–1989), ein US-Amerikaner aus Indiana, der 1979 in einer Rätselzeitschrift ein Zahlenrätsel namens „number place“ veröffentlichte, das Eulers Lateinischen Quadraten nachgebildet war: Ein Lateinisches Quadrat der Ordnung 9 war

1				2			7	
9			5					3
		4		8				6
		3	1			5		
		6			2		4	
	9		7				8	
	4				6			2
	8			7		1		
5					3	9		

nur teilweise mit den Nummern 1 bis 9 gefüllt; die Leser der Rätselzeitschrift sollten die fehlenden Nummern ergänzen. Eine wichtige Neuerung von Garns' Quadrat bestand darin, dass nicht nur jede Zahl von 1 bis 9 in jeder Zeile und in jeder Spalte des  $9 \times 9$ -Quadrats genau einmal vorkommen muss, sondern auch in jedem der neun  $3 \times 3$ -Unterblöcke. Ein (gar nicht so einfaches) Beispiel für

das von Garns erfundene Zahlenrätsel ist hier abgedruckt. Unten werde ich beschreiben, wie dies Rätsel konstruiert wurde.

Weltweit populär wurde Garns' Zahlenrätsel auf dem Umweg über Japan. Eine japanische Zeitschrift druckte diese Rätsel zwischen 1984 und 1986 unter dem Namen „Suji wa dokushin ni kagiru“ (deutsch etwa: „Isolieren Sie die Zahlen; die Zahlen dürfen nur einmal vorkommen“), abgekürzt „Sudoku“, regelmäßig ab. Die Londoner „Times“ druckte Sudoku-Rätsel seit 2004, bald darauf auch deutsche Zeitschriften.<sup>1</sup>

## 2. Wie viele verschiedene vollständig ausgefüllte Sudoku-Gitter gibt es?

Eine naheliegende Idee zur automatischen Lösung von Sudokus ist die folgende: Man berechnet mit Computerhilfe einen vollständigen Katalog sämtlicher vollständig ausgefüllter Sudoku-Gitter. Um ein Sudoku zu lösen braucht man dann nur nachzuschauen, mit welchem Eintrag im Katalog die in einem Sudoku-Rätsel eingetragenen

<sup>1</sup> Die Infos über die Herkunft des Sudoku stammen von Wikipedia [2].

Zahlen übereinstimmen. Dass dies Verfahren nicht funktionieren kann merkt man, sobald man überlegt wie groß der Katalog sein müsste.

Aufgrund der zusätzlichen Bedingung (jede der neun Zahlen muss nicht nur in jeder Zeile und in jeder Spalte, sondern auch in jedem der neun  $3 \times 3$ -Blöcke genau ein mal vorkommen) gibt es *viel* weniger verschiedene Sudoku-Lösungen als Lateinische Quadrate der Ordnung 9. Wie viel weniger? Das berechneten – mit beträchtlichem Computer-Aufwand – im Jahr 2005 Felgenhauer und Jarvis [3]. Wenn ihr Ergebnis stimmt, dann gibt es „nur“

$$6\,670\,903\,752\,021\,072\,936\,960 \approx 6.671 \cdot 10^{21}$$

verschiedene vollständig ausgefüllte Sudokus. Die Anzahl verschiedener vollständig ausgefüllter Sudokus ist also um mehr als den Faktor 800 000 kleiner als die Anzahl  $L(9)$  verschiedener Lateinischer Quadrate der Ordnung 9. Aber sie ist immer noch viel zu groß für einen Katalog. Workman schätzte grob ab, dass das totale weltweit installierte Speichervolumen für digitale Daten im Jahr 2015 etwa

$$2.5 \cdot 10^{21} \text{ Byte}$$

betrug [4]. Um ein einziges vollständig ausgefülltes Sudoku abzuspeichern, benötigt man etwa 80 Byte. Also benötigt der vollständige Sudoku-Katalog etwa

$$80 \text{ Byte} \cdot 6.671 \cdot 10^{21} \approx 5.3 \cdot 10^{23} \text{ Byte}$$

Speicherplatz. Selbst wenn man sämtlichen Speicherplatz, der 2015 auf privaten PC's, in Rechenzentren, Server-Parks, und wo auch immer auf der ganzen Welt vorhanden war, für den Sudoku-Katalog beschlagnahmen würde, könnte man darauf nur etwa 0.5 % des Katalogs unterbringen. Ganz abgesehen davon, dass man den Katalog, bevor man ihn abspeichern kann, natürlich erst einmal berechnen müsste...

### 3. Die Konstruktion neuer Sudoku-Rätsel

Eine offensichtliche und (im Prinzip) einfache Methode zur Konstruktion neuer Sudoku-Rätsel besteht darin, ein leeres Sudoku-Gitter so lange mit einzelnen Zahlen zu befüllen, bis die Lösung eindeutig ist. Das ist eine sehr mühsame Methode, weil man sehr leicht in eine Sackgasse gerät und eine Vorgabe konstruiert, die überhaupt keine Lösung hat. Diese Methode eignet sich deshalb nur, wenn man von einer leistungsfähigen Computer-Software unterstützt wird.

Einfacher ist es, zunächst ein vollständig ausgefülltes Sudoku-Gitter (also ein Element aus dem „Katalog“, von dem im vorigen Abschnitt die Rede war) zu konstruieren, und dann so viele Zahlen zu löschen, dass das Sudoku einerseits nicht zu einfach wird, andererseits aber eine eindeutige Lösung behält. Ein vollständig ausgefülltes Gitter findet man am einfachsten durch Permutation bekannter vollständiger Gitter.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Man kann zum Beispiel von diesem sehr einfach konstruierten Gitter ausgehen, das offensichtlich alle drei Bedingungen (jede der neun Zahlen kommt in jeder Zeile und in jeder Spalte und in jedem der neun  $3 \times 3$ -Blöcke genau ein mal vor) erfüllt: In den drei oberen  $3 \times 3$ -Blöcken kommen die Zahlengruppen (1 2 3), (4 5 6), und (7 8 9) je ein mal vor, aber in jedem Block in einer anderen Zeile. Offenbar erhält man neue, korrekte Sudokus, wenn man die Zahlengruppen in geeigneter Weise permutiert. Man kann die (1 2 3) des ersten Blocks in der ersten, oder in der zweiten, oder in der dritten Zeile

erhält man neue, korrekte Sudokus, wenn man die Zahlengruppen in geeigneter Weise permutiert. Man kann die (1 2 3) des ersten Blocks in der ersten, oder in der zweiten, oder in der dritten Zeile

anordnen (3 Möglichkeiten). Anschließend bleiben zwei mögliche Zeilen für die (1 2 3) des zweiten Blocks, und zwei Möglichkeiten für die Platzierung von (4 5 6) im ersten Block. Nach diesen Festlegungen sind die Positionen der neun horizontalen Dreiergruppen in den oberen drei Blöcken eindeutig bestimmt. Entsprechende horizontale Dreiergruppen, die in gleicher Weise permutiert werden können, gibt es auch in den drei mittleren und in den drei unteren Blöcken. Also kann man durch Permutation der horizontalen Dreiergruppen insgesamt

$$(3 \cdot 2 \cdot 2)^3 = 12^3 = \mathbf{1728}$$

verschiedene korrekte, vollständig ausgefüllte Sudoku-Gitter erzeugen. Permutationen kompletter Zeilen innerhalb der oberen oder mittleren oder unteren Blöcke wären zwar auch zulässig, würden aber keine neuartigen Gitter gegenüber den zuvor betrachteten Permutationen der horizontalen Dreiergruppen ergeben.

Die drei  $3 \times 3$ -Blöcke, die anfangs oben im Sudoku-Gitter standen, kann man alternativ auch in der Mitte oder unten platzieren (3 Möglichkeiten), anschließend bleiben zwei Möglichkeiten für die Platzierung der drei Blöcke, die anfangs in der Mitte standen. Insgesamt kann man durch diese Permutation

$$3 \cdot 2 = \mathbf{6}$$

verschiedene korrekte, vollständig ausgefüllte Sudoku-Gitter erzeugen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

In den drei unteren Blöcken des Ausgangs-Gitters sind vertikale Dreiergruppen durch Farben hervorgehoben. Offenbar erhält man neue, korrekte Sudoku-Gitter wenn man die Gruppe  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$  mit der Gruppe  $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$  oder der Gruppe  $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  vertauscht, oder die Gruppe  $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$  mit der Gruppe  $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ . Das ergibt 6 verschiedene Möglichkeiten.

Ebenfalls 6 verschiedene Gitter erhält man durch Permutation der rot gefärbten Dreiergruppen, und weitere 6 verschiedene Gitter durch Permutation der grau gefärbten Dreiergruppen. Macht insgesamt  $6^3$  verschiedene Gitter durch Permutation vertikaler Dreiergruppen in den unteren Blöcken. Die gleiche Anzahl von Permutationen vertikaler Dreiergruppen ist jeweils in den oberen und in den mittleren Blöcken möglich. Also erhält man insgesamt

$$(6^3)^3 = 6^9 = \mathbf{10\ 077\ 696}$$

verschiedene korrekte, vollständig ausgefüllte Sudoku-Gitter durch Permutationen vertikaler Dreiergruppen. Weitere

$$6^3 = \mathbf{216}$$

verschiedene korrekte, vollständig ausgefüllte Sudoku-Gitter erhält man durch Permutationen kompletter Spalten innerhalb der linken oder mittleren oder rechten Blöcke. Permutationen der kompletten linken, mittleren, und rechten Blöcke wären zwar auch zulässig, würden aber keine neuartigen Gitter gegenüber den zuvor betrachteten Permutationen der vertikalen Dreiergruppen ergeben.

Durch Spiegelung des kompletten Gitters an der durch die gestrichelte rote Linie markierten Diagonalen kann man die Anzahl

korrekter Sudoku-Gitter um den Faktor

## 2

vergrößern. Weitere Spiegelungen an der anderen Diagonalen, oder an der mittleren Zeile, oder an der mittleren Spalte wären zulässig, d. h. sie würden zu weiteren korrekten Sudoku-Gittern führen, genau so wie Rotationen des gesamten Gitters um  $90^\circ$ , oder  $180^\circ$ , oder  $270^\circ$ . Ich vermute aber (ganz sicher bin ich mir nicht), dass alle diese Transformationen zu Gittern führen würden, die bereits durch die zuvor betrachteten Permutationen erzeugt wurden.

Es gibt noch eine wichtige weitere Art von Permutationen, die wir bisher nicht bedacht haben: Die Umbenennung der Zahlen. Ein korrektes Sudoku-Gitter bleibt ein korrektes Sudoku-Gitter, wenn z. B. jede 5 in 7 umbenannt wird, und gleichzeitig jede 7 in 5. Oder wenn jede 4 in 3 umbenannt wird und gleichzeitig jede 3 in 7 und gleichzeitig jede 7 in 4. Es gibt 9 Möglichkeiten, die alte 1 in eine neue Zahl (die auch die alte Zahl, also 1 sein kann) umzubenennen. Anschließend gibt es 8 Möglichkeiten, die alte 2 in eine neue Zahl umzubenennen, dann 7 Möglichkeiten die alte 3 in eine neue Zahl umzubenennen, und so weiter. Insgesamt kann man also

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = \mathbf{362\ 880}$$

verschiedene korrekte, vollständig ausgefüllte Sudoku-Gitter durch Umbenennungen der Zahlen erzeugen.

Durch Kombination sämtlicher aufgezählter Möglichkeiten kann man aus dem einfachen Sudoku-Gitter, das auf den vorigen Seiten mehrfach abgedruckt wurde, insgesamt

$$\mathbf{1728 \cdot 6 \cdot 10\ 077\ 696 \cdot 216 \cdot 2 \cdot 362\ 880} = 1.63796 \cdot 10^{19}$$

verschiedene korrekte, vollständig ausgefüllte Sudoku-Gitter erzeugen. Das sind zwar „nur“ 0.25% der laut Felgenhauer und Jarvis [3] insgesamt  $6.671 \cdot 10^{21}$  möglichen Gitter, aber doch eine ganze Menge: Wenn eine Rätselzeitschrift ihren Lesern jede Woche 100 neue Sudokus präsentieren möchte, und den Ehrgeiz hat dass niemals

zwei Sudokus die gleiche Lösung haben, dann reicht der Vorrat von  $1.63796 \cdot 10^{19}$  verschiedenen Lösungen für

$$1.63796 \cdot 10^{17} \text{ Wochen} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ Jahre} .$$

Wenn man bedenkt dass in etwa 5 Milliarden Jahren =  $5 \cdot 10^9$  Jahren die Erde in der sterbenden Sonne verglühen wird, dann ist der Vorrat von  $1.63796 \cdot 10^{19}$  verschiedenen Sudoku-Gittern zweifellos mehr als ausreichend.

Zum Rätsel wird ein vollständig gefülltes Sudoku-Gitter dadurch, dass man einen Teil der Zahlen nicht druckt, sondern die Leser danach suchen lässt. Die Kunst besteht darin, so viele Zahlen wegzulassen, dass das Rätsel für die Leser interessant ist, andererseits aber nicht so viele Zahlen wegzulassen dass es keine eindeutige Lösung mehr gibt.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7	8	9	1
5	6	7	8	9	1	2	3	4
8	9	1	2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8	9	1	2
6	7	8	9	1	2	3	4	5
9	1	2	3	4	5	6	7	8

Wenn man nur auf die horizontalen Dreiergruppen achtet könnte man meinen, dass man die sechs durch rote Punkte markierten Zahlen weglassen kann. Denn die Anordnung der horizontalen Dreiergruppen (1 2 3), (4 5 6), und (7 8 9) bleibt ja eindeutig. Tatsächlich wäre die Lösung aber mehrdeutig, weil Vertauschung der vertikalen Dreiergruppen  $\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  ebenfalls eine korrekte Lösung ergeben

würde. Die Mehrdeutigkeit wäre beseitigt, sobald man auch nur eine – egal welche – der 6 mit roten Punkten markierten Zahlen *nicht* weglässt.

Komplette Zeilen können vertauscht werden, wenn sie innerhalb der gleichen drei Blöcke liegen. Deshalb dürfen zwei solche Spalten nie vollständig leer sein, wenn das Sudoku eindeutig bleiben soll.

Das gleiche gilt für Spalten.

Schließlich muss man hinsichtlich der Eindeutigkeit von Sudoku-Rätseln auch die Vertauschbarkeit der Zahlen im Auge behalten: Das Rätsel kann nur dann eine eindeutige Lösung haben, wenn mindestens acht der Zahlen von 1 bis 9 jeweils mindestens ein mal gedruckt sind.

Unter Umständen kann ein Sudoku-Rätsel bereits mehrdeutig sein, wenn nur 4 Felder unbestimmt gelassen werden. Die beiden Sudoku-Gitter (entnommen aus [5])

9	2	6	5	7	1	4	8	3
3	5	1	4	8	6	2	7	9
8	7	4	9	2	3	5	1	6
5	8	2	3	6	7	1	9	4
1	4	9	2	5	8	3	6	7
7	6	3	1	9	4	8	2	5
2	3	8	7	4	9	6	5	1
6	1	7	8	3	5	9	4	2
4	9	5	6	1	2	7	3	8

9	2	6	5	7	1	4	8	3
3	5	1	4	8	6	2	7	9
8	7	4	9	2	3	5	1	6
5	8	2	3	6	7	1	9	4
1	4	9	2	5	8	3	6	7
7	6	3	1	4	9	8	2	5
2	3	8	7	9	4	6	5	1
6	1	7	8	3	5	9	4	2
4	9	5	6	1	2	7	3	8

unterscheiden sich durch nichts anderes als die vier rot gedruckten Felder. Ein Sudoku-Rätsel, in dem alle 77 schwarz gedruckten Felder vorgegeben wären, und nur die vier rot gedruckten Felder leer wären, wäre also zweideutig.

Bei günstiger konstruierten Gittern braucht man viel weniger Einträge vorzugeben, und erhält trotzdem eine eindeutige Lösung. Sudokus, die in Zeitschriften veröffentlicht werden, haben meist zwischen 22 und 35 vorgegebene Einträge. Wie viele Vorgaben braucht man im günstigsten Fall mindestens, damit die Lösung eindeutig ist?

Laut [5] hat der Australier Gordon Royle 36 628 „wirklich ver-

schiedene“ eindeutige Sudokus mit nur 17 Vorgaben gefunden, aber kein einziges eindeutiges mit nur 16 Vorgaben. Mit „wirklich verschiedene“ ist gemeint, dass sich diese 36 628 Sudokus durch mehr unterscheiden als nur Umbenennung der Zahlen, oder Spiegelung an einer Achse, oder Permutationen von Zeilen und/oder Spalten, oder Rotationen des gesamten Gitters.

							1	
4								
	2							
				5		4		7
		8				3		
		1		9				
3			4			2		
	5		1					
			8		6			

Dies ist eins der Sudokus aus Royle’s Sammlung. Herzberg und Murty [5] veröffentlichten es mit der Bemerkung: “We leave it to the reader that the puzzle [...] has a unique solution.” Diese Einladung gebe ich ungefiltert an die Leser dieser Mitteilung weiter.

16 Vorgaben, und fanden keins. Die Autoren waren sich sicher: “had one existed, we would have found it.” schreiben sie in ihrem Artikel.

1 <sup>•</sup>	2 <sup>•</sup>	3	4	5 <sup>•</sup>	6	7	8 <sup>•</sup>	9 <sup>•</sup>
4 <sup>•</sup>	5	6 <sup>•</sup>	7 <sup>•</sup>	8 <sup>•</sup>	9	1 <sup>•</sup>	2	3 <sup>•</sup>
7 <sup>•</sup>	8	9 <sup>•</sup>	1	2 <sup>•</sup>	3 <sup>•</sup>	4	5 <sup>•</sup>	6 <sup>•</sup>
2	3 <sup>•</sup>	4 <sup>•</sup>	5	6 <sup>•</sup>	7 <sup>•</sup>	8 <sup>•</sup>	9	1 <sup>•</sup>
5 <sup>•</sup>	6 <sup>•</sup>	7	8	9	1 <sup>•</sup>	2 <sup>•</sup>	3 <sup>•</sup>	4
8 <sup>•</sup>	9	1	2 <sup>•</sup>	3	4 <sup>•</sup>	5 <sup>•</sup>	6	7 <sup>•</sup>
3 <sup>•</sup>	4	5 <sup>•</sup>	6 <sup>•</sup>	7	8 <sup>•</sup>	9	1 <sup>•</sup>	2
6	7 <sup>•</sup>	8 <sup>•</sup>	9	1	2 <sup>•</sup>	3	4 <sup>•</sup>	5 <sup>•</sup>
9	1 <sup>•</sup>	2 <sup>•</sup>	3 <sup>•</sup>	4 <sup>•</sup>	5	6 <sup>•</sup>	7 <sup>•</sup>	8

McGuire, Tugemann, und Civarrio [6] suchten mit gewaltigem Computer-Aufwand nach einem eindeutig lösbaren Sudoku mit nur

Zum Abschluss dieser Überlegungen konstruieren wir ein Sudoku. Dabei gehen wir aus von unserem einfachen und übersichtlichen „Grund-Sudoku-Gitter“, weil man dabei sehr leicht erkennt welche Zahlen weggelassen werden können ohne die Eindeutigkeit des Sudokus zu gefährden, und welche nicht. Die Zahlen, die wir weglassen werden, sind mit roten Punkten markiert. Die roten Punkte

konzentrieren sich auf die vertikalen Dreiergruppen. Es werden so viele dieser Zahlen weggelassen wie gerade noch zulässig, damit das Sudoku eindeutig bleibt.

Jetzt vertauschen wir die Zeilen 1–3 mit den Zeilen 4–6, dann die neuen Zeilen 1–3 mit den Zeilen 7–9, dann die Spalten 1–3 mit den Spalten 4–6, dann die neuen Spalten 1–3 mit den Spalten 7–9, dann die Spalte 1 mit Spalte 2, Spalte 5 mit Spalte 6, und Spalte 7 mit Spalte 9. Schließlich führen wir noch folgende Umbenennung der Zahlen durch:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
9	2	5	7	4	3	1	8	6

Auf diese Weise erhalten wir dieses Sudoku-Gitter. Wenn man alle rot markierten Zahlen weglässt, ist es mit dem auf Seite 5 abgedruckten Sudoku identisch.

1	3	8	6	2	9	4	7	5
9	6	2	5	4	7	8	1	3
7	5	4	3	8	1	2	9	6
4	7	3	1	6	8	5	2	9
8	1	6	9	5	2	3	4	7
2	9	5	7	3	4	6	8	1
3	4	1	8	9	6	7	5	2
6	8	9	2	7	5	1	3	4
5	2	7	4	1	3	9	6	8

#### 4. Ein „Sudoku-Assistent“

Der Sudoku-Assistent ist ein Excel-Makro, das den Benutzer zuverlässig warnt wenn er bei der Lösung einen Fehler macht. Außerdem kann man die Lösung des Sudokus automatisch eintragen lassen. Vor allem aber überprüft der Assistent innerhalb weniger Sekunden, ob ein bestimmtes Sudoku überhaupt eine eindeutige Lösung hat, d. h. ob es sich um eine korrekt gestellte Aufgabe handelt, oder nicht. Man kann den Excel-File mit dem Makro hier herunterladen (Excel, 208KB):

<https://www.astrophys-neunhof.de/utls/Sudoku-Assistent.xls>

## Literatur

- [1] S. Bammel, J. Rothstein: *The number of  $9 \times 9$  Latin squares*, Discr. Math. **11**, 93 – 95 (1975),  
[https://doi.org/10.1016/0012-365X\(75\)90108-9](https://doi.org/10.1016/0012-365X(75)90108-9)
- [2] *Sudoku*, Wikipedia, <https://de.wikipedia.org/wiki/Sudoku>
- [3] B. Felgenhauer, F. Jarvis: *Enumerating possible Sudoku grids*,  
<http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudoku.pdf>
- [4] M. Workman: *How many gigabytes of storage are in the whole world?*, <https://www.quora.com/How-many-gigabytes-of-storage-are-in-the-whole-world>
- [5] A. M. Herzberg, M. R. Murty: *Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*, Notices AMS **54**, 708 – 717 (2007),  
<https://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf>
- [6] G. McGuire, B. Tugemann, G. Civario:  
*There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem*, arXiv: 1201.0749 (2012)  
<https://arxiv.org/abs/1201.0749>