

Strahlung und Strahlungs-Rückwirkung

Das elektromagnetische Feld beschleunigter Punktladungen nach der Maxwell'schen Elektrodynamik, und die Strahlungsrückwirkung nach der Theorie von Abraham und Lorentz

Übersicht

Die vier Propagatoren des klassischen elektromagnetischen Feldes werden hergeleitet. Auf dieser Basis werden in Abschnitt 2 die Lienard-Wiechert'schen Potentiale berechnet, und aus diesen wiederum die retardierten und avancierten Felder abgeleitet, die von Punktladungen emittiert werden. Die Eigenschaften dieser Felder werden untersucht, und die Strahlungsformel von Larmor berechnet. In Abschnitt 3 wird die Strahlungsrückwirkung mithilfe von Überlegungen zur Energieerhaltung betrachtet. Die gleiche Größe wird anschließend im letzten Abschnitt nochmals hergeleitet mithilfe des von Abraham und Lorentz vorgeschlagenen klassischen Modells eines ausgedehnten Elektrons.

Inhalt

| | |
|--|----|
| 1. Propagatoren | 2 |
| 2. Das elektromagnetische Feld einer Punktladung | 15 |
| 3. Strahlungsrückwirkung: Energieerhaltung | 34 |
| 4. Strahlungsrückwirkung einer ausgedehnten Ladung | 38 |
| Literatur | 47 |

1. Propagatoren

Die Lagrangedichte des klassischen Elektromagnetischen Feldes lautet [1, (4.121)]

$$\mathcal{L} = -j^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0} F_{\sigma\tau} F^{\sigma\tau} \quad (1)$$

$$F_{\sigma\tau} \equiv d_\sigma A_\tau - d_\tau A_\sigma \quad , \quad (A^\mu) \equiv (\Phi/c, \mathbf{A}) .$$

Durch Variation der Lagrangedichte nach der Feldkomponente A_μ erhält man die Feldgleichung [1, (4.126)]

$$\begin{aligned} 0 &= d_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \\ &= -\frac{1}{\mu_0} d_\nu (d^\nu A^\mu - d^\mu A^\nu) + j^\mu . \end{aligned} \quad (2)$$

Mit der

$$\text{Lorentz-Eichung: } d_\nu A^\nu = 0 \quad (3)$$

vereinfacht sich die Feldgleichung zu

$$\square A^\mu(x) \equiv d_\nu d^\nu A^\mu(x) = \mu_0 j^\mu(x) . \quad (4)$$

Nach dem Prinzip von Huygens kann man das Feld $A(x)$ als Überlagerung von Wellen darstellen, die sich von Quellen $\mu_0 j(y)$ zum Raumzeitpunkt x ausbreiten und dort zum Feld mit den Komponenten

$$A^\rho(x) = \int d^4 y D^{\rho\sigma}(x, y) g_{\sigma\tau} \mu_0 j^\tau(y) \quad (5)$$

überlagern. Die Greensfunktion $D(x, y)$ mit 4×4 Raum-Zeit-Komponenten wird auch als Propagator des Feldes $A(x)$ bezeichnet.

Dieser Ansatz wird in die Feldgleichung (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 \square A^\rho(x) &= \int d^4y \square D^{\rho\sigma}(x, y) g_{\sigma\tau} \mu_0 j^\tau(y) = \\
 &= \mu_0 j^\rho(x) = \int d^4y \delta^{(4)}(x - y) \underbrace{g^{\rho\sigma} g_{\sigma\tau}}_{g^{\rho\tau}} \mu_0 j^\tau(y) \\
 \implies \square D^{\rho\sigma}(x, y) &= g^{\rho\sigma} \delta^{(4)}(x - y) \tag{6}
 \end{aligned}$$

Man beachte, dass der Operator $\square \equiv d_\nu d^\nu$ nur auf die Raum-Zeit-Koordinate x , aber nicht auf die Raum-Zeit-Koordinate y wirkt. Die Dimension des Propagators ist

$$\left[D^{\rho\sigma}(x, y) \right] = \frac{1}{\text{Länge}^2} . \tag{7}$$

Falls das betrachtete System in Raum und Zeit translationsinvariant ist, hängt $D^{\rho\sigma}(x, y)$ nur von der Differenz $(x - y)$ ab, und man kann die Fourier-Transformationen

$$D^{\rho\sigma}(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{D}^{\rho\sigma}(k) \exp\{-ik(x - y)\} \tag{8a}$$

$$\delta^{(4)}(x - y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp\{-ik(x - y)\} \tag{8b}$$

ausführen. Damit erhält man im Raum der vierdimensionalen Wellenzahlen k die Gleichung

$$\begin{aligned}
 \square \tilde{D}^{\rho\sigma}(k) &= -k^2 \tilde{D}^{\rho\sigma}(k) = g^{\rho\sigma} \\
 \tilde{D}^{\rho\sigma}(k) &= -\frac{g^{\rho\sigma}}{k^2} , \quad \left[\tilde{D}^{\rho\sigma}(k) \right] = \text{Länge}^2 . \tag{9}
 \end{aligned}$$

Die Rücktransformation in den Zeit-Orts-Raum ergibt

$$\begin{aligned} D^{\rho\sigma}(x-y) &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{g^{\rho\sigma}}{k^2} \exp\{-ik(x-y)\} \\ &= - \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} g^{\rho\sigma} \exp\{i\mathbf{k}(x-\mathbf{y})\} \cdot F \end{aligned} \quad (10a)$$

$$F \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\exp\{-ick^0(t-t_y)\}}{(k^0)^2 - \mathbf{k}^2} \quad (10b)$$

$$t \equiv x^0/c \quad , \quad t_y \equiv y^0/c . \quad (10c)$$

F hat zwei Pole, denn „auf der Masseschale“ ist

$$\begin{aligned} k^2 &= (k^0)^2 - \mathbf{k}^2 = (k^0 + \omega/c)(k^0 - \omega/c) = 0 \quad (11) \\ \omega &\equiv +c\sqrt{\mathbf{k}^2} \geq 0 . \end{aligned}$$

Wir vereinbaren, dass mit ω/c stets die positive Wurzel von \mathbf{k}^2 gemeint ist, ein negativer Wert also als $-\omega/c \leq 0$ geschrieben werden muss. In (10b) ist k^0 aber *nicht* auf die Masseschale fixiert, sondern nimmt als Integrationsvariable – unabhängig von \mathbf{k} – jeden Wert im Intervall $-\infty \leq k^0 \leq +\infty$ an. Um die Divergenz des Integrals F bei den beiden Polstellen (11) zu vermeiden, werden in den Nenner infinitesimal kleine Summanden $\pm i\epsilon$ mit $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$ eingefügt. Dafür gibt es vier verschiedene Möglichkeiten:

$$F_r \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\exp\{-ick^0(t-t_y)\}}{(k^0 + \omega/c + i\epsilon)(k^0 - \omega/c + i\epsilon)} \quad (12a)$$

$$F_a \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\exp\{-ick^0(t-t_y)\}}{(k^0 + \omega/c - i\epsilon)(k^0 - \omega/c - i\epsilon)} \quad (12b)$$

$$F_f \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\exp\{-ick^0(t-t_y)\}}{(k^0 + \omega/c - i\epsilon)(k^0 - \omega/c + i\epsilon)} \quad (12c)$$

$$F_{af} \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk^0}{2\pi} \frac{\exp\{-ick^0(t-t_y)\}}{(k^0 + \omega/c + i\epsilon)(k^0 - \omega/c - i\epsilon)} \quad (12d)$$

- * F_r hat Pole bei $k^0 = -\omega/c - i\epsilon$ und bei $k^0 = +\omega/c - i\epsilon$. Diese Verschiebung der Pole führt zum retardierten Propagator.
- * F_a hat Pole bei $k^0 = -\omega/c + i\epsilon$ und bei $k^0 = +\omega/c + i\epsilon$. Diese Verschiebung der Pole führt zum avancierten Propagator.
- * F_f hat Pole bei $k^0 = -\omega/c + i\epsilon$ und bei $k^0 = +\omega/c - i\epsilon$. Diese Verschiebung der Pole, die in Abbildung 1 eingezeichnet ist, führt zum Feynman-Propagator.
- * F_{af} hat Pole bei $k^0 = -\omega/c - i\epsilon$ und bei $k^0 = +\omega/c + i\epsilon$. Diese Verschiebung der Pole führt zu einem Propagator, für den sich in der Literatur kein Name eingebürgert hat. Wir werden ihn als anti-Feynman-Propagator bezeichnen.

Abhängig vom Wert von $t - t_y$ kann man die Integrale (12) – wie in Abbildung 1 skizziert – in der oberen oder unteren komplexen Ebene schließen, ohne ihren Wert zu verändern. Denn bei sehr großem $|k^0|$ ist ihr Wert aufgrund des $(k^0)^2$ im Nenner vernachlässigbar

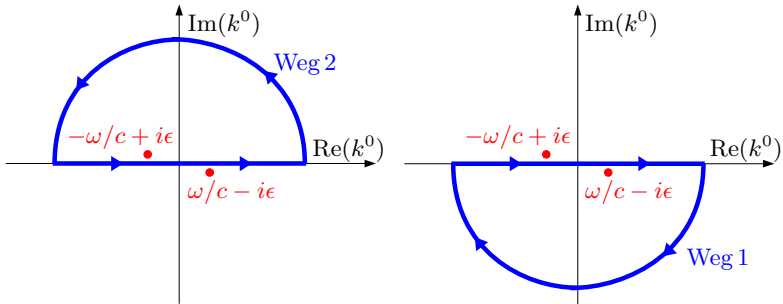


Abb. 1 : Integrationswege (blau) und Pole (rot)
 beim Feynman-Propagator

klein. Und der Faktor $\exp\{-ick^0(t - t_y)\}$ im Zähler bewirkt, dass die Integrale über den unteren Halbbogen (Weg 1) bei sehr großem negativen Imaginärteil von k^0 im Fall $t > t_y$ vernachlässigbar klein sind. Dagegen sind im Fall $t < t_y$ die Integrale über den oberen Halbbogen (Weg 2) bei sehr großem positiven Imaginärteil von k^0 vernachlässigbar klein. Mithilfe des Cauchy'schen Integralsatzes und des Residuensatzes¹ können die Integrale über die geschlossenen Wege 1 und 2 berechnet werden. Mit der Stufenfunktion

$$\Theta(t - t_y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t > t_y \\ 0 & \text{falls } t < t_y \end{cases} \quad (13)$$

lassen sich die Ergebnisse übersichtlich zusammenfassen. Für $t = t_y$ wird keine Greensfunktion definiert.

$$F_r = i\Theta(t - t_y) \left(\frac{\exp\{+i\omega(t - t_y)\}}{+2\omega/c} + \frac{\exp\{-i\omega(t - t_y)\}}{-2\omega/c} \right) \quad (14a)$$

$$F_a = i\Theta(t_y - t) \left(\frac{\exp\{+i\omega(t - t_y)\}}{-2\omega/c} + \frac{\exp\{-i\omega(t - t_y)\}}{+2\omega/c} \right) \quad (14b)$$

$$F_f = i\Theta(t_y - t) \frac{\exp\{+i\omega(t - t_y)\}}{-2\omega/c} + i\Theta(t - t_y) \frac{\exp\{-i\omega(t - t_y)\}}{-2\omega/c} \quad (14c)$$

$$F_{af} = i\Theta(t - t_y) \frac{\exp\{+i\omega(t - t_y)\}}{+2\omega/c} + i\Theta(t_y - t) \frac{\exp\{-i\omega(t - t_y)\}}{+2\omega/c} \quad (14d)$$

Die Einfärbung weist darauf hin, dass nur vier der acht Terme voneinander verschieden sind. Mit (10a) gilt deshalb zwischen dem

¹ In [2] findet man eine auf den Bedarf von Physikern zugeschnittene, kurz gefasste Erklärung dieser wichtigen mathematischen Werkzeuge.

retardierten Propagator $D_r^{\rho\sigma}(x-y)$, dem avancierten Propagator $D_a^{\rho\sigma}(x-y)$, dem Feynman-Propagator $D_f^{\rho\sigma}(x-y)$, und dem anti-Feynman-Propagator $D_{af}^{\rho\sigma}(x-y)$ die Relation

$$D_r^{\rho\sigma} + D_a^{\rho\sigma} = D_f^{\rho\sigma} + D_{af}^{\rho\sigma} . \quad (15)$$

Wir werden jetzt einen allgemeinen Propagator $D_s^{\rho\sigma}(x-y)$ mithilfe von

$$F_s \equiv i\Theta\left(s_1(t-t_y)\right) \frac{\exp\{s_2i\omega(t-t_y)\}}{s_32\omega/c} \quad (16)$$

$$s_n = +1 \text{ oder } -1 \quad , \quad n = 1, 2, 3$$

berechnen. Der allgemeine Propagator lautet

$$D_s^{\rho\sigma}(x-y) \stackrel{(10a)}{=} -g^{\rho\sigma} \frac{i\Theta\left(s_1(t-t_y)\right)}{s_32(2\pi)^3} \cdot \int d\mathbf{k} \exp\{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\} \frac{\exp\{s_2i\omega(t-t_y)\}}{\omega/c} . \quad (17)$$

Sobald wir diesen Propagator gefunden haben, lassen sich die vier gesuchten Propagatoren durch Einsetzen der aktuellen Werte von s_1, s_2, s_3 gemäß (14) leicht konstruieren.

In [3, Kap. 20] wird beschrieben, wie sich das Integral (17) berechnen lässt. Wir definieren Kugelkoordinaten im Wellenzahl-Raum mit dem Azimutalwinkel φ , dem Polarwinkel ϑ , und der Radialkoordinate $\omega/c = |\mathbf{k}|$:

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\vartheta=0}^{\pi} d\vartheta \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{c} \frac{\omega^2}{c^2} \sin \vartheta \equiv \int d\mathbf{k} \quad (18)$$

Die k^3 -Achse der Kugelkoordinaten wird parallel zu $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ gewählt, so dass

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{k} &= R \frac{\omega}{c} \cos \vartheta \\ R &\equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\end{aligned}\quad (19)$$

gilt. Diese Definitionen werden in den allgemeinen Propagator (17) eingesetzt. Das Integral über φ ergibt 2π . Damit ist

$$\begin{aligned}D_s^{\rho\sigma}(x - y) &= -g^{\rho\sigma} \frac{i\Theta(s_1(t - t_y))}{s_3 2(2\pi)^2} \cdot \\ &\cdot \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{d\omega}{c} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\exp\{s_2 i\omega(t - t_y)\}}{\omega/c} \cdot K \quad (20) \\ K &\equiv \int_{\vartheta=0}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \exp\{iR \frac{\omega}{c} \cos \vartheta\} .\end{aligned}$$

Um K zu berechnen, substituieren wir

$$u \equiv iR \frac{\omega}{c} \cos \vartheta \quad , \quad \frac{ic}{R\omega} \int_{+iR\omega/c}^{-iR\omega/c} du = \int_{\vartheta=0}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \quad (21)$$

und erhalten

$$\begin{aligned}K &= \frac{ic}{R\omega} \int_{+iR\omega/c}^{-iR\omega/c} du \exp\{u\} \\ &= \frac{ic}{R\omega} \left(\exp\{-iR\omega/c\} - \exp\{+iR\omega/c\} \right) , \quad (22)\end{aligned}$$

womit der allgemeine Propagator zu

$$D_s^{\rho\sigma}(x-y) = +g^{\rho\sigma} \frac{\Theta(s_1(t-t_y))}{s_3 2(2\pi)^2 R c} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\exp\{+i\omega(s_2 t - s_2 t_y - R/c)\} - \exp\{+i\omega(s_2 t - s_2 t_y + R/c)\} \right)$$

wird. Mithilfe dieser Formel kann man durch Vergleich von (16) mit (14a) bis (14d) sofort die vier Propagatoren konstruieren:

$$D_r^{\rho\sigma}(x-y) = +g^{\rho\sigma} \frac{\Theta(t-t_y)}{2(2\pi)^2 R c} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\exp\{+i\omega(t-t_y - R/c)\} - \exp\{+i\omega(t-t_y + R/c)\} - \exp\{+i\omega(t_y - t - R/c)\} + \exp\{+i\omega(t_y - t + R/c)\} \right) \quad (23a)$$

$$D_a^{\rho\sigma}(x-y) = -g^{\rho\sigma} \frac{\Theta(t_y - t)}{(2\pi)^2 R c} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\exp\{+i\omega(t-t_y - R/c)\} - \exp\{+i\omega(t-t_y + R/c)\} - \exp\{+i\omega(t_y - t - R/c)\} + \exp\{+i\omega(t_y - t + R/c)\} \right) \quad (23b)$$

$$D_f^{\rho\sigma}(x-y) = +g^{\rho\sigma} \frac{\Theta(t_y - t)}{-2(2\pi)^2 R c} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\exp\{+i\omega(t-t_y - R/c)\} - \exp\{+i\omega(t-t_y + R/c)\} \right) + g^{\rho\sigma} \frac{\Theta(t-t_y)}{-2(2\pi)^2 R c} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\exp\{+i\omega(t_y - t - R/c)\} - \exp\{+i\omega(t_y - t + R/c)\} \right) \quad (23c)$$

$$\begin{aligned}
D_{\text{af}}^{\rho\sigma}(x-y) &= +g^{\rho\sigma} \frac{\Theta(t-t_y)}{2(2\pi)^2 Rc} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\right. \\
&\quad \left. \exp\{+i\omega(t-t_y-R/c)\} - \exp\{+i\omega(t-t_y+R/c)\} \right) \\
&+ g^{\rho\sigma} \frac{\Theta(t_y-t)}{2(2\pi)^2 Rc} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\right. \\
&\quad \left. \exp\{+i\omega(t_y-t-R/c)\} - \exp\{+i\omega(t_y-t+R/c)\} \right) \quad (23d)
\end{aligned}$$

Bei der Hälfte der Summanden wurde genutzt, dass im Exponenten von (10a) das Vorzeichen von \mathbf{k} umgedreht werden darf, weil symmetrisch über sämtliche positiven und negativen Wellenzahlen \mathbf{k} integriert wird.

Im retardierten und im avancierten Propagator können jeweils zwei und zwei Terme $+\exp\{\dots\}$ und $-\exp\{\dots\}$ zusammengefasst werden, indem man den Integrationsbereich von 0 bis $+\infty$ auf $-\infty$ bis $+\infty$ erweitert. Dann erkennt man die Deltafunktionen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp\{\pm i\omega(t-t_y-R/c)\} = 2\pi \delta(t-t_y-R/c) \quad (24a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp\{\pm i\omega(t-t_y+R/c)\} = 2\pi \delta(t-t_y+R/c) . \quad (24b)$$

Damit erhält man folgende retardierten und avancierten Propagatoren:

$$D_r^{\rho\sigma}(x-y) = + \frac{g^{\rho\sigma} \Theta(t-t_y)}{4\pi Rc} \left(\delta(t-t_y-R/c) - \delta(t-t_y+R/c) \right) \quad (25a)$$

$$D_a^{\rho\sigma}(x-y) = - \frac{g^{\rho\sigma} \Theta(t_y-t)}{4\pi Rc} \left(\delta(t-t_y-R/c) - \delta(t-t_y+R/c) \right) \quad (25b)$$

Es ist immer $R/c > 0$. Deshalb sind wegen der Stufenfunktionen die zweite Deltafunktion in D_r und die erste Deltafunktion in D_a immer Null, und können gestrichen werden. Weil wir $R = 0$ ausschließen, erzwingen die verbleibenden Deltafunktionen $t > t_y$ in D_r und $t < t_y$ in D_a , so dass die Stufenfunktionen ebenfalls gestrichen werden können:

$$D_r^{\rho\sigma}(x - y) = + \frac{g^{\rho\sigma}}{4\pi Rc} \delta(t - t_y - R/c) \quad (26a)$$

$$D_a^{\rho\sigma}(x - y) = + \frac{g^{\rho\sigma}}{4\pi Rc} \delta(t - t_y + R/c) \quad (26b)$$

Im Folgenden wird sich eine explizit kovariante Formulierung dieser Propagatoren als nützlich erweisen, in der nur der Vierervektor $x - y$ auftaucht, aber nicht seine Raumkomponenten \mathbf{R} . Um diese Formulierung herzuleiten, drehen wir in (25) die Vorzeichen der beiden unwirksamen Deltafunktionen um.

$$D_r^{\rho\sigma}(x - y) = + \frac{g^{\rho\sigma} \Theta(t - t_y)}{4\pi Rc} \left(\delta(t - t_y - R/c) + \delta(t - t_y + R/c) \right) \quad (27a)$$

$$D_a^{\rho\sigma}(x - y) = + \frac{g^{\rho\sigma} \Theta(t_y - t)}{4\pi Rc} \left(\delta(t - t_y - R/c) + \delta(t - t_y + R/c) \right) \quad (27b)$$

Der retardierte und der avancierte Propagator unterscheiden sich dann durch nichts anderes als die Stufenfunktionen. Anschließend nutzen wir die Formel

$$\delta(f(a)) = \sum_i \frac{\delta(a - a_i)}{\left| \frac{df}{da} \Big|_{a_i} \right|} \quad \text{mit } f(a_i) = 0, \quad \frac{df}{da} \Big|_{a_i} \neq 0 \quad (28)$$

$$f(a) \equiv (a + a_i)(a - a_i) = a^2 - a_i^2$$

$$\implies \delta(a^2 - a_i^2) = \frac{\delta(a - a_i) + \delta(a + a_i)}{|2a_i|} .$$

Einsetzen von $a \equiv t - t_y$ und $a_i \equiv R/c$ ergibt

$$\frac{(\delta(t - t_y - R/c) + \delta(t - t_y + R/c))}{2R/c} = \delta\left((t - t_y)^2 - R^2/c^2\right). \quad (29)$$

Mit $c^2(t - t_y)^2 - R^2 = x^2 - y^2$ und $\delta(bx) = \delta(x)/|b|$ erhält man die zu (26) alternative Schreibweise

$$D_r^{\rho\sigma}(x - y) = \frac{g^{\rho\sigma}\Theta(t - t_y)}{2\pi} \delta\left((x - y)^2\right) \quad (30a)$$

$$D_a^{\rho\sigma}(x - y) = \frac{g^{\rho\sigma}\Theta(t_y - t)}{2\pi} \delta\left((x - y)^2\right) \quad (30b)$$

Die Stufenfunktion $\Theta(t - t_y)$ stört die Kovarianz dieser Formulierungen nicht. Denn die Deltafunktionen und die Stufenfunktionen erzwingen zusammen, dass y beim retardierten Propagator auf dem rückwärts-Lichtkegel von x liegt, und beim avancierten Propagator auf dem vorwärts-Lichtkegel von x . Wenn dies in einem Koordinatensystem der Fall ist, dann ist es in jedem anderen, durch eine eigentliche Lorentztransformation erreichbaren Koordinatensystem ebenfalls der Fall. In diesem Sinne können die Stufenfunktionen im Zusammenhang von (30) also als Lorentzskalare betrachtet werden.

Der Feynman-Propagator und der anti-Feynman-Propagator enthalten keine Delta-Funktionen. Stattdessen werden sie üblicherweise in den Formulierungen (10a+12) oder (23) angegeben. Zur künftigen Referenzierung stellen wir hier die vier Propagatoren noch einmal übersichtlich zusammen:

$$D_r^{\rho\sigma}(x - y) \stackrel{(26)}{=} \frac{g^{\rho\sigma}}{4\pi Rc} \delta(t - t_y - R/c) \quad (31a)$$

$$\stackrel{(30)}{=} \frac{g^{\rho\sigma}\Theta(t - t_y)}{2\pi} \delta\left((x - y)^2\right) \quad (31b)$$

$$D_a^{\rho\sigma}(x-y) \stackrel{(26)}{=} \frac{g^{\rho\sigma}}{4\pi Rc} \delta(t-t_y + R/c) \quad (31c)$$

$$\stackrel{(30)}{=} \frac{g^{\rho\sigma} \Theta(t_y - t)}{2\pi} \delta((x-y)^2) \quad (31d)$$

$$D_f^{\rho\sigma}(x-y) \stackrel{(10a),(14)}{=} -ig^{\rho\sigma} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\Theta(t-t_y) \exp\{-ik(x-y)\} - \Theta(t_y-t) \exp\{+ik(x-y)\}}{-2\omega/c} \quad (31e)$$

$$\stackrel{(23c)}{=} -\frac{g^{\rho\sigma}}{8\pi^2 Rc} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\Theta(t-t_y) \exp\{-i\omega(t-t_y + R/c)\} - \Theta(t-t_y) \exp\{-i\omega(t-t_y - R/c)\} + \Theta(t_y-t) \exp\{+i\omega(t-t_y - R/c)\} - \Theta(t_y-t) \exp\{+i\omega(t-t_y + R/c)\} \right) \quad (31f)$$

$$D_{af}^{\rho\sigma}(x-y) \stackrel{(10a),(14)}{=} -ig^{\rho\sigma} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\Theta(t_y-t) \exp\{-ik(x-y)\} - \Theta(t-t_y) \exp\{+ik(x-y)\}}{+2\omega/c} \quad (31g)$$

$$\stackrel{(23d)}{=} -\frac{g^{\rho\sigma}}{8\pi^2 Rc} \int_{\omega=0}^{\infty} d\omega \left(\Theta(t_y-t) \exp\{-i\omega(t-t_y - R/c)\} - \Theta(t_y-t) \exp\{-i\omega(t-t_y + R/c)\} + \Theta(t-t_y) \exp\{+i\omega(t-t_y + R/c)\} - \Theta(t-t_y) \exp\{+i\omega(t-t_y - R/c)\} \right) \quad (31h)$$

Durch Vergleich von (31a) mit (31c) bzw. von (31f) mit (31h) er-

kennt man folgende Transformationseigenschaft der Propagatoren:

$$\begin{aligned} \text{Umkehr der Zeitrichtung} &\implies \\ \implies D_r^{\rho\sigma} &\longleftrightarrow D_a^{\rho\sigma} \quad \text{und} \quad D_f^{\rho\sigma} \longleftrightarrow D_{af}^{\rho\sigma} . \end{aligned} \quad (32)$$

Man beachte, dass bei der Umkehr der Zeitrichtung auch die Frequenz ω das Vorzeichen wechselt, während R und c (der Betrag der Lichtgeschwindigkeit) unverändert bleiben.

Die Propagatoren $D(x - y)$ sind Funktionen des Vierervektors

$$x - y = \left(c(t - t_y), \mathbf{x} - \mathbf{y} \right) . \quad (33)$$

Die Raum-Zeit-Komponenten dieses Vierervektors sind nicht unabhängig voneinander, sondern unterliegen Einschränkungen, die man am deutlichsten in den Deltafunktionen von (31a) und (31c) erkennt. Nicht unmittelbar offensichtlich ist dabei, welche Komponenten als abhängige und welche als unabhängige Variable zu betrachten sind. Folgende Definitionen erscheinen möglich:

$$t_y(t, R) \equiv t \mp R/c \quad (34a)$$

$$t(t_y, R) \stackrel{?}{\equiv} t_y \pm R/c \quad \text{ist falsch!} \quad (34b)$$

$$R(t, t_y) \stackrel{?}{\equiv} \pm c(t - t_y) \quad \text{ist falsch!} \quad (34c)$$

Wir müssen darauf achten, dass der Formalismus konsistent bleibt. Ausgangspunkt war das Potential in der Schreibweise (5). Dort wurde $x = (t, \mathbf{x})$ fest vorgegeben, während $y = (t_y, \mathbf{y})$ als Integrationsvariable eingeführt wurde. t und \mathbf{x} hängen also eindeutig nicht von irgendwelchen anderen Variablen ab. Damit scheidet die Definition (34b) als inkonsistent aus. Als abhängige Variable kommen nur t_y und \mathbf{y} in Frage, für die wir folgende Definitionen

versuchen:

$$t_y(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv t \mp |\mathbf{x} - \mathbf{y}|/c = t \mp R/c \quad \text{ist richtig} \quad (34d)$$

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad \text{ist richtig} \quad (34e)$$

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{x}, t_y) \stackrel{?}{=} ?? \quad \text{ist nicht definierbar} \quad (34f)$$

Die Relation $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \pm c(t - t_y)$ reicht nicht aus, um \mathbf{y} als Funktion von t , \mathbf{x} , und t_y zu definieren. Also bleiben nur (34d) und (34e) als konsistente und durchführbare Definition der Abhängigkeiten zwischen den Variablen. t und \mathbf{x} sind vorgegeben. Der Parameter \mathbf{y} kann und muss ebenfalls beliebig gewählt werden, er ist also weder von t noch von \mathbf{x} noch von t_y abhängig. Erst dann kann $t_y \equiv (34d)$ als abhängige Variable berechnet werden, während R nichts weiter als eine abkürzende Schreibweise für $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ist, also ebenfalls weder von t noch von t_y abhängt:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dt_y} = 0 \quad (35)$$

2. Das elektromagnetische Feld einer Punktladung

Wir interessieren uns besonders für den Fall, dass die Quelle des Feldes eine bewegte Punktladung q ist, die sich zur Zeit t_y am Ort $\mathbf{r}(t_y)$ befindet und mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t_y) = d\mathbf{r}(t_y)/dt$ bewegt. Bei der Herleitung des elektromagnetischen Feldes, das von der Ladung hervorgerufen wird, werden wir uns vor allem an Jackson [4, Kap. 14] orientieren.

Wir werden die retardierten und avancierten Felder aus den retardierten und avancierten Potentialen ableiten. Um diese zu berechnen, setzen wir die retardierten und avancierten Propagatoren (31) in (5) ein. Mit $g^{\rho\sigma}g_{\sigma\tau} = g^{\rho\tau} = \delta_{\rho\tau}$ und $\delta(x/c^2) = c^2\delta(x)$

erhält man die beiden Schreibweisen

$$A_r^\rho(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y \frac{j^\rho(y)}{R} \delta(t - t_y - R/c) \quad (36a)$$

$$= \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y j^\rho(y) \Theta(t - t_y) \delta([x - y]^2) \quad (36b)$$

$$A_a^\rho(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y \frac{j^\rho(y)}{R} \delta(t - t_y + R/c) \quad (36c)$$

$$= \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y j^\rho(y) \Theta(t_y - t) \delta([x - y]^2) . \quad (36d)$$

Weil sich diese Potentiale nur durch wenige Vorzeichen unterscheiden, fassen wir sie zu einem allgemeinen Potential $A_s^\rho(x)$ zusammen, in dem der Index s für r oder a steht. Doppelte Vorzeichen \pm oder \mp sind als $\overset{\text{retardiert}}{\text{avanciert}}$ zu lesen, d. h. das obere Vorzeichen gilt immer für die retardierten Felder, das untere Vorzeichen für die avancierten Felder. In dieser verallgemeinerten Schreibweise lauten die Potentiale

$$A_s^\rho(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y \frac{j^\rho(y)}{R} \delta(t - t_y \mp R/c) \quad (36e)$$

$$= \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y j^\rho(y) \Theta(\pm t \mp t_y) \delta([x - y]^2) . \quad (36f)$$

Wir adaptieren Definition (19) für den Fall der Punktladung durch

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{r} \quad , \quad R \equiv |\mathbf{R}| \quad , \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathbf{R}}{R} . \quad (37)$$

Die Stromdichte

$$j^\rho(\mathbf{y}) = j^\rho(t_y, \mathbf{y}) \stackrel{?}{=} q \left(c, \mathbf{v}(t_y) \right)^\rho \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{r}(t_y))$$

wäre nur für eine nicht-relativistische Beschreibung geeignet. Denn (c, \mathbf{v}) ist kein Vierervektor, weil sein Quadrat $c^2 - \mathbf{v}^2$ kein Lorentzskalar ist. Stattdessen benutzen wir die Vierergeschwindigkeit

$$\begin{aligned} V^\rho(t) &\equiv \frac{dr^\rho(t)}{d\tau} \equiv \frac{d(ct, \mathbf{r}(t))^\rho}{d\tau} = \\ &= \gamma(t) \frac{d(ct, \mathbf{r}(t))^\rho}{dt} = \gamma(t) (c, \mathbf{v}(t))^\rho \quad (38) \\ \gamma(t) &\equiv \frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{v^2(t)}{c^2} \right)^{-1/2}, \end{aligned}$$

in der τ die Zeit im Koordinatensystem mit $v = 0$ ist, also die Eigenzeit der Quelle. Weil (r^ρ) ein Lorentzvektor und τ ein Lorentzskalar ist, ist auch (V^ρ) ein Lorentzvektor. Damit kann man die Stromdichte²

$$j^\rho(\mathbf{y}) \equiv c \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau q V^\rho(\tau) \delta^{(4)}(\mathbf{y} - \mathbf{r}(\tau)) \quad (39)$$

bilden, die als Integral über die Eigenzeit der Quelle ebenfalls ein Lorentzvektor ist.

Diese Stromdichte wird in (36f) eingesetzt, und das Integral über

² Diese Formel wurde von Dirac [5, Gleichung (5)] vorgeschlagen.

d^4y ausgeführt:

$$\begin{aligned}
 A_s^\rho(x) &= \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y c \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau qV^\rho(\tau) \delta^{(4)}(y - r(\tau)) \cdot \\
 &\quad \cdot \Theta(\pm t \mp t_y) \delta([x - y]^2) \\
 &= \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau qV^\rho(\tau) \Theta(\pm t \mp \underbrace{r^0(\tau)/c}_\tau) \delta([x - r(\tau)]^2) . \quad (40)
 \end{aligned}$$

Aus dem Vergleich von (31a) mit (31b) bzw. (31c) mit (31d) liest man ab:

$$\frac{1}{2Rc} \delta(t - \tau \mp R/c) = \Theta(\pm t \mp \tau) \delta([x - r(\tau)]^2) \quad (41)$$

Damit kann man das Integral über τ leicht lösen:

$$A_s^\rho(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qV^\rho(\tau_s)}{R} \quad \text{mit } \tau_s = t \mp R/c \quad (42)$$

In (41) haben wir die Deltafunktion von $[x - r(\tau)]^2$ in die Deltafunktion von $t - \tau \mp R/c$ zurückverwandelt (natürlich hätten wir genau so gut gleich mit (36e) statt mit (36f) starten können.) Jetzt wollen wir sie in die Deltafunktion von $\tau - \tau_s$ umwandeln. Dazu benutzen wir nochmals Formel (28) mit $f(\tau) \equiv [x - r(\tau)]^2$. Die Nullstellen von f sind

$$\begin{aligned}
 [x - r(\tau)]^2 = c^2(t - \tau)^2 - R^2 &= 0 \\
 \tau &= t \mp r/c ,
 \end{aligned}$$

und die Ableitungen von f an den beiden Nullstellen sind

$$\frac{df}{d\tau} = -2(x - r) \frac{dr}{d\tau} \stackrel{(38)}{=} -2(x - r)V .$$

Da die Stufenfunktion jeweils einen der beiden Summanden ausschließt, ist

$$2\Theta(\pm t \mp \tau) \delta\left([x - r(\tau)]^2\right) = \Theta(\pm t \mp \tau) \frac{\delta(\tau - \tau_s)}{|(x - r)V|}. \quad (43)$$

Das Produkt im Nenner ist

$$\begin{aligned} [x - r(\tau_s)]V &\stackrel{(37)}{=} c[t - \tau_s]V^0 - \mathbf{R} \cdot \mathbf{V} = \pm Rc\gamma - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v}\gamma = \\ &= \pm Rc\gamma(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) \quad \text{mit } \mathbf{n} \equiv \mathbf{R}/R \end{aligned} \quad (44a)$$

$$|[x - r(\tau_s)]V| = \pm[x - r(\tau_r)]V = Rc\gamma(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) > 0, \quad (44b)$$

denn die Geschwindigkeit v der Quelle ist in jedem Bezugssystem kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c . Die retardierten und avancierten Potentiale lauten mit $c^{-2} = \epsilon_0\mu_0$ in vier- und dreidimensionaler Schreibweise

$$\begin{aligned} A_s^\rho(t, \mathbf{x}) &\stackrel{(40)}{=} \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau qV^\rho(\tau) \Theta(\pm t \mp \tau) \frac{\delta(\tau - \tau_s)}{|(x - r)V|} \\ &= \pm \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{qV^\rho(\tau_s)}{[x - r(\tau_s)]V(\tau_s)} \end{aligned} \quad (45a)$$

$$\Phi_s(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)} \Big|_{\tau_s} \quad (45b)$$

$$\mathbf{A}_s(t, \mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v}}{R(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)} \Big|_{\tau_s} \quad (45c)$$

$$\text{mit } t = \tau_s \pm R/c = \tau_r + R/c = \tau_a - R/c.$$

Die Stufenfunktion $\Theta(\pm\tau_s \mp \tau)$ kann entfallen, wenn die Werte von τ_r und τ_a explizit angegeben werden. Diese Gleichungen für die von einer Punktladung erzeugten Potentiale wurden von Liénard und Wiechert gefunden.

Wir benutzen griechische Buchstaben $\rho, \sigma, \tau, \dots$ für die vier Raum-Zeit-Indizes 0, 1, 2, 3, und lateinische Buchstaben j, k, l, \dots für die drei Raum-Indizes 1, 2, 3. Um die Felder

$$F^{\sigma\rho}(t, \mathbf{x}) = d^\sigma A^\rho(t, \mathbf{x}) - d^\rho A^\sigma(t, \mathbf{x}) \quad (46a)$$

$$\frac{E^k}{c} \equiv F^{k0}, \quad B^j \equiv -F^{kl}, \quad jkl = 123 \text{ zyklisch} \quad (46b)$$

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -\nabla\Phi(t, \mathbf{x}) - \frac{d\mathbf{A}(t, \mathbf{x})}{dt} \quad (46c)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \quad (46d)$$

aus den Potentialen abzuleiten, gehen wir von der Integralform (40) der Potentiale aus. Auch weiterhin sind doppelte Vorzeichen als ^{retardiert} _{avanciert} zu lesen, d. h. das obere Vorzeichen gilt für die retardierten Felder, das untere Vorzeichen für die avancierten Felder. Die Ableitung nach t wirkt nicht auf die Argumente τ und $r(\tau)$ der verschiedenen Funktionen, sondern nur auf das Argument t der Theta-Funktion und das Argument x der Delta-Funktion. Wir interessieren uns nur für Lösungen mit $R \neq 0$. Dann liefert im Produkt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Theta(\pm t \mp \tau) \delta((x - r(\tau))^2) &= \\ &= \delta(\pm t \mp \tau) \delta((x - r(\tau))^2) + \Theta(\pm t \mp \tau) \frac{d}{dt} \delta((x - r(\tau))^2) \\ &= \delta(\pm R) + \Theta(t - \tau) \frac{d}{dt} \delta((x - r(\tau))^2) \end{aligned} \quad (47)$$

nur der zweite Summand einen Beitrag. Deshalb ist für $\sigma = 0, 1, 2, 3$

$$d^\sigma A_s^\rho(x) \stackrel{(40)}{=} \frac{\mu_0 c}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau q V^\rho(\tau) \Theta(\pm t \mp \tau) d^\sigma \delta((x - r(\tau))^2) .$$

In diese Gleichung setzen wir

$$\begin{aligned} d^\sigma \delta([x - r(\tau)]^2) &= \\ &= \left(d^\sigma [x - r(\tau)]^2 \right) \frac{d\tau}{d[x - r(\tau)]^2} \frac{d\delta([x - r(\tau)]^2)}{d\tau} \\ &= \frac{2[x - r(\tau)]^\sigma}{-2[x - r(\tau)] V(\tau)} \frac{d\delta([x - r(\tau)]^2)}{d\tau} \end{aligned}$$

ein, und integrieren partiell:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\mu_0 c} d^\sigma A_s^\rho(x) &= \\ &= -q \Theta(\pm t \mp \tau) \frac{[x - r(\tau)]^\sigma V^\rho(\tau)}{[x - r(\tau)] V(\tau)} \delta([x - r(\tau)]^2) \Big|_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau q \Theta(\pm t \mp \tau) \delta([x - r(\tau)]^2) \frac{d}{d\tau} \frac{[x - r(\tau)]^\sigma V^\rho(\tau)}{[x - r(\tau)] V(\tau)} \end{aligned}$$

Wegen $\Theta[\pm t \mp (\pm\infty)] = 0$ und $\delta([x - r(\mp\infty)]^2) = 0$ ist nur die letzte Zeile verschieden von Null. Die Theta-Funktion konnte aus dem bei (47) genannten Grund vor die Ableitung nach τ gezogen werden. Einsetzen von (43) mit Berücksichtigung der Vorzeichen laut (44) ergibt

$$\begin{aligned} d^\sigma A_s^\rho(x) &= \pm \frac{\mu_0 c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau q \Theta(\pm t \mp \tau) \cdot \\ &\cdot \frac{\delta(\tau - \tau_s)}{[x - r(\tau_s)] V(\tau_s)} \frac{d}{d\tau} \frac{[x - r(\tau)]^\sigma V^\rho(\tau)}{[x - r(\tau)] V(\tau)}. \quad (48) \end{aligned}$$

Integration über τ und Ableitung nach τ :

$$d^\sigma A_s^\rho(x) = \pm \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q \Theta(\pm t \mp \tau_s)}{[x - r(\tau_s)] V(\tau_s)} \frac{d}{d\tau} \frac{[x - r(\tau_s)]^\sigma V^\rho(\tau_s)}{[x - r(\tau_s)] V(\tau_s)}$$

$$\begin{aligned}
d^\sigma A_s^\rho(x) = & \pm \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q \Theta(\pm t \mp \tau_s)}{\left([x - r(\tau_s)] V(\tau_s)\right)^3} \cdot \left[\right. \\
& \left(- \frac{dr^\sigma}{d\tau} V^\rho + [x - r]^\sigma \frac{dV^\rho}{d\tau} \right) [x - r] V - \\
& \left. - \left(- \frac{dr}{d\tau} V + [x - r] \frac{dV}{d\tau} \right) [x - r]^\sigma V^\rho \right]_{\tau_s} \quad (49)
\end{aligned}$$

Mit (44a) und mit

$$\begin{aligned}
\frac{dr^\sigma}{d\tau} &= \frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} (ct, \mathbf{r})^\sigma = \gamma(c, \mathbf{v})^\sigma = V^\sigma \\
V^2 &= \gamma^2(c^2 - \mathbf{v}^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - v^2/c^2} = c^2
\end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
F_s^{\sigma\rho}(x) = & \pm \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q}{\left(\pm Rc\gamma(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)\right)^3} \cdot \left[\right. \\
& \left([x - r]^\sigma \frac{dV^\rho}{d\tau} - [x - r]^\rho \frac{dV^\sigma}{d\tau} \right) (\pm Rc\gamma)(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) + \\
& \left. + \left(c^2 - [x - r] \frac{dV}{d\tau} \right) \left([x - r]^\sigma V^\rho - [x - r]^\rho V^\sigma \right) \right]_{\tau_s} \\
& \text{mit } t = \tau_s \pm R/c = \tau_r + R/c = \tau_a - R/c \\
& V = V(\tau_s), \quad r = r(\tau_s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(\tau_s), \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\tau_s). \quad (50)
\end{aligned}$$

Die Stufenfunktion $\Theta(\pm t \mp \tau_s)$ kann entfallen, weil das Zeitargument $\tau_s = t \mp R/c$ explizit angegeben wird.

Zur Berechnung der dreidimensionalen Felder \mathbf{E} und \mathbf{B} benötigen wir die einzelnen Komponenten F^{j0} und F^{kl} . Einsetzen des Vierervektors

$$x - r(\tau_s) \stackrel{(37)}{=} \left(c(t - \tau_s), \mathbf{R} \right) = \left(\pm R, \mathbf{R} \right) \stackrel{(37)}{=} R \left(\pm 1, \mathbf{n} \right), \quad (51)$$

der Schreibweise

$$\dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} \neq \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} \quad , \quad \dot{v} \equiv |\dot{\mathbf{v}}| \neq \frac{!}{d\tau} \frac{dv}{d\tau} \quad , \quad v \equiv |\mathbf{v}| \quad , \quad (52)$$

des Vierervektors

$$V = \gamma(c, \mathbf{v}) \quad , \quad (53)$$

sowie der Ableitungen³

$$\begin{aligned} \frac{dV^\rho}{d\tau} &\stackrel{(38)}{=} \left[\underbrace{\frac{d}{d\tau}}_{\gamma} \frac{d}{dt} \underbrace{(1 - v^2/c^2)^{-1/2}}_{\gamma} \right] (c, \mathbf{v})^\rho + \gamma^2 \frac{d}{dt} (c, \mathbf{v})^\rho \\ &= \left[-\frac{1}{2} \gamma^4 \left(-\frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \right] (c, \mathbf{v})^\rho + \gamma^2 (0, \dot{\mathbf{v}})^\rho \\ &= \left(\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} \quad , \quad \gamma^4 \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^2 \dot{\mathbf{v}} \right)^\rho \end{aligned} \quad (54)$$

ergibt

$$\begin{aligned} F_s^{j0}(x) &= \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q}{(Rc\gamma(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c))^3} \cdot \left[\left(R^j \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} \mp \right. \right. \\ &\quad \mp R(\gamma^4 \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2} v^j + \gamma^2 \dot{v}^j) \left. \right) (\pm Rc\gamma)(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) + \\ &\quad + \left(c^2 - (\pm R, \mathbf{R}) \left(\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c} \quad , \quad \gamma^4 \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^2 \dot{\mathbf{v}} \right) \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left. \left(R^j \gamma c \mp R\gamma v^j \right) \right]_{\tau_s} \end{aligned}$$

³ Die mittlere Zeile von (14.12) in der dritten Auflage von Jackson [6] ist korrekt. Diese Formel ist in der dritten deutschen Auflage [4] total verkorkst. Dort stimmen noch nicht einmal die Dimensionen. Die vierte deutschsprachige Auflage [7] ist weniger falsch, aber immer noch nicht richtig. Denn dort wurde Jacksons korrekter Faktor γ^4 durch einen falschen Faktor γ^3 ersetzt.

$$\begin{aligned}
F_s^{j0}(x) = & \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q R c \gamma}{\left(R c \gamma (1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} / c)\right)^3} \cdot \left[c^2 (n^j \mp v^j / c) + \right. \\
& \left. + R \gamma^2 \left((n^j \mp v^j / c) (\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - (1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} / c) \dot{v}^j \right) \right]_{\tau_s} \quad (55a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_s^{kl}(x) = & \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q}{\left(R c \gamma (1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} / c)\right)^3} \cdot \left[\left(R^k (\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} v^l + \right. \right. \\
& \left. \left. + \gamma^2 \dot{v}^l) - R^l (\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} v^k + \gamma^2 \dot{v}^k) \right) (\pm R c \gamma) (1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} / c) \right. \\
& \left. + \left(c^2 - (\pm R, \mathbf{R}) (\gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c}, \gamma^4 \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{c^2} \mathbf{v} + \gamma^2 \dot{\mathbf{v}}) \right) \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left(R^k \gamma v^l - R^l \gamma v^k \right) \right]_{\tau_s} = \\
= & \frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q R c \gamma}{\left(R c \gamma (1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} / c)\right)^3} \cdot \left[c^2 (n^k v^l / c - n^l v^k / c) + \right. \\
& \left. + R \gamma^2 \left((n^k v^l / c - n^l v^k / c) \mathbf{n} \dot{\mathbf{v}} \pm \right. \right. \\
& \left. \left. \pm (n^k \dot{v}^l - n^l \dot{v}^k) (1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} / c) \right) \right]_{\tau_s} \quad (55b)
\end{aligned}$$

In F_s^{kl} erkennt man in jedem Faktor ein Kreuzprodukt $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^j = a^k b^l - a^l b^k$. Außerdem benutzen wir $c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$ und die Grassmann-Identität

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} . \quad (56)$$

Damit lassen sich die retardierten und avancierten dreidimensiona-

len Felder (46b) in der Form

$$\mathbf{E}_s(x) = \mathbf{E}_s^{(g)}(x) + \mathbf{E}_s^{(s)}(x) \quad , \quad \mathbf{B}_s(x) = \mathbf{B}_s^{(g)}(x) + \mathbf{B}_s^{(s)}(x)$$

$$\mathbf{E}_s^{(g)}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{n} \mp \mathbf{v}/c)}{R^2\gamma^2(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \Big|_{\tau_s} \quad (57a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(s)}(x) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{Rc^2(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \cdot \left[\right. \\ &\quad \left. (\mathbf{n} \mp \mathbf{v}/c)(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) - \dot{\mathbf{v}}(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) \right]_{\tau_s} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \mathbf{n} \times \left((\mathbf{n} \mp \mathbf{v}/c) \times \dot{\mathbf{v}} \right)}{Rc^2(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \Big|_{\tau_s} \quad (57b) \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}_s^{(g)}(x) = -\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q(\mathbf{n} \times \mathbf{v}/c)}{R^2\gamma^2(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \Big|_{\tau_s} \quad (57c)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_s^{(s)}(x) &= -\frac{\mu_0 c}{4\pi} \frac{q}{Rc^2(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \cdot \left[(\mathbf{n} \times \mathbf{v}/c)(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})(\pm 1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) \right]_{\tau_s} \quad (57d) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \left\{ \begin{array}{l} s : \text{retardiert } r , \text{ avanciert } a \\ \pm : \text{retardiert } + , \text{ avanciert } - \\ \mp : \text{retardiert } - , \text{ avanciert } + \\ t = \tau_s \pm R/c = \tau_r + R/c = \tau_a - R/c \end{array} \right.$$

schreiben. Hier wurden die Beschleunigungsfelder, die proportional zu $\dot{\mathbf{v}}$ sind, mit einem Index^(s) gekennzeichnet (nicht verwechseln mit dem unteren Index s , der für $r = \text{retardiert}$ oder $a = \text{avanciert}$ steht), und die Geschwindigkeitsfelder, die auch bei $\dot{\mathbf{v}} = 0$ auftreten, mit einem Index^(g).

Bevor wir die Felder im Detail diskutieren, wollen wir noch auf einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen den elektri-

schen und magnetischen Feldern hinweisen. Dazu berechnen wir die Kreuzprodukte

$$\begin{aligned} \pm \mathbf{n}(\tau_s) \times \mathbf{E}_s^{(g)}(x) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{n} \times \mathbf{v}/c)}{R^2\gamma^2(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \Big|_{\tau_s} \\ &= c\mathbf{B}_s^{(g)}(x) \end{aligned} \quad (58a)$$

$$\begin{aligned} \pm \mathbf{n}(\tau_s) \times \mathbf{E}_s^{(s)}(x) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{Rc^2(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c)^3} \cdot \left[\right. \\ &\quad \left. (\mathbf{n} \times \mathbf{v}/c)(\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \pm (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})(1 \mp \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) \right]_{\tau_s} \\ &= c\mathbf{B}_s^{(s)}(x) . \end{aligned} \quad (58b)$$

Unabhängig von Geschwindigkeit und Beschleunigung der Quelle steht das magnetische Feld \mathbf{B}_s stets senkrecht auf dem elektrischen Feld \mathbf{E}_s , und die Beträge der Amplituden des elektrischen und des magnetischen Feldes unterscheiden sich nur durch den Faktor c .

Wir haben in (32) festgestellt, dass bei Umkehr der Zeitrichtung der retardierte Propagator in den avancierten Propagator übergeht, und umgekehrt. Weil die gesamte Herleitung der Potentiale und Felder auf diesen Propagatoren basiert, kann man auch sagen: Die avancierte Elektrodynamik geht durch Zeitumkehr aus der retardierten Elektrodynamik hervor, und umgekehrt. Das bedeutet aber nicht, dass jede einzelne retardierte Feldkomponente bei Zeitumkehr in die avancierte Feldkomponente übergeht. Nur im Zusammenwirken der Felder bei einem messbaren Phänomen muss diese Symmetrie bestehen.

Tatsächlich ist die Symmetrie der Felder (57) unter Zeitumkehr verwickelter: Die magnetischen Felder wechseln das Vorzeichen, die elektrischen Felder aber nicht. Denn die Geschwindigkeit \mathbf{v} der Quelle ist der einzige Faktor, der bei Umkehrung der Zeitrichtung das Vorzeichen wechselt. $\dot{\mathbf{v}}$ ist als zweite Ableitung des Ortsvektors

nach der Zeit invariant unter Zeitumkehr, und das Gleiche gilt für den Betrag c der Lichtgeschwindigkeit.

Ein beobachtbares Phänomen ist beispielsweise die Lorentzkraft, die ein Feld ($F_s^{\sigma\tau}$) auf ein Teilchen mit der Ladung Q , der Masse m , dem Viererimpuls (p^α) = $m(u^\alpha)$, der Viergeschwindigkeit (u^α) = $\gamma(c, \mathbf{u})$ und der Eigenzeit τ ausübt:

$$\begin{aligned} \frac{dp^\alpha}{d\tau} &= QF_s^{\alpha\beta}u_\beta = QF_s^{\alpha 0}\gamma c + QF_s^{\alpha j}\gamma u_j & (59a) \\ mc \frac{d\gamma}{dt} &= -QF_s^{0j}u^j \\ m \frac{d\gamma u^j}{dt} &= QF_s^{j0}c - QF_s^{jk}u^k . \end{aligned}$$

Einsetzen der dreidimensionalen Felder (46b) ergibt die relativistische Form der Lorentz-Kraft:

$$mc \frac{d\gamma}{dt} = +Q \mathbf{u} \cdot \mathbf{E}_s / c \quad (59b)$$

$$m \frac{d\gamma \mathbf{u}}{dt} = Q(\mathbf{E}_s + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_s) \quad (59c)$$

Die erste Gleichung beschreibt den Energiegewinn des Teilchens, zu dem \mathbf{B}_s überhaupt nicht beiträgt, und \mathbf{E}_s nur mit seiner zu \mathbf{u} parallelen Komponente. $d\gamma/dt$ ist proportional zu $\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}$, siehe (54). Als erste Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit wechselt \mathbf{v} bei Zeitumkehr das Vorzeichen, während $\dot{\mathbf{v}}$ unter Zeitumkehr invariant ist. Also wechselt die linke Seite von (59b) bei Zeitumkehr das Vorzeichen, ebenso wie \mathbf{u} auf der rechten Seite. Also muss

$$\mathbf{E}_a = \mathbf{E}_r \quad (60a)$$

gelten. Demgegenüber bewirkt der zusätzliche Faktor \mathbf{u} , dass die linke Seite von (59c) unter Zeitumkehr invariant ist. Auf der rechten

Seite ist \mathbf{E}_s laut (60a) invariant, und \mathbf{u} wechselt das Vorzeichen. Also muss

$$\mathbf{B}_a = -\mathbf{B}_r \quad (60b)$$

gelten. Die Felder (57) erfüllen diese Bedingungen.

Im Fall $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} = 0$ sind $\mathbf{B}_s^{(g)} = \mathbf{B}_s^{(s)} = \mathbf{E}_s^{(s)} = 0$ und $\gamma = 1$. Dann hat $\mathbf{E}_s^{(g)}$ die wohlbekannte einfache Form

$$\mathbf{E}_s^{(g)}(x) \stackrel{(57a)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{n}}{R^2} \Big|_{\tau_s} \quad (61)$$

des Coulomb'schen Gesetzes. Zwischen den Ladungen q und Q wirkt die retardierte Kraft

$$m \frac{d\gamma\mathbf{u}}{dt} = Q\mathbf{E}_r \stackrel{(61)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq\mathbf{n}}{R^2} \Big|_{\tau_r} \quad (62a)$$

und die avancierte Kraft

$$m \frac{d\gamma\mathbf{u}}{dt} = Q\mathbf{E}_a \stackrel{(61)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq\mathbf{n}}{R^2} \Big|_{\tau_a}. \quad (62b)$$

Addition beider Gleichungen, und Division durch 2 ergibt

$$m \frac{d\gamma\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{2} Q(\mathbf{E}_r + \mathbf{E}_a) \stackrel{(61)}{=} \frac{1}{2} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \Big|_{\tau_r} + \frac{\mathbf{n}}{R^2} \Big|_{\tau_a} \right). \quad (62c)$$

Seit dem Ende des neunzehnten Jahrhunderts werden diese Gleichungen auf unterschiedliche Weise interpretiert. Nach dem einen Standpunkt sind die avancierten Felder nur ein Artefakt der Theorie, und existieren in der Realität überhaupt nicht. Die gemessene Kraft beruht nach dieser Ansicht allein auf dem retardierten Feld, und wird durch (62a) korrekt beschrieben.

Offensichtlich kann man durch die Messung der Kraft im statischen Fall nicht entscheiden, ob (62a) oder (62c) richtig ist, weil

beide Gleichungen die identische Kraft ergeben. Dagegen scheinen die Beobachtungen der Felder bewegter Ladungen gegen die Existenz der avancierten Felder zu sprechen: Wenn man einen Lichtblitz in Richtung auf einen Spiegel emittiert, dann beobachtet man den reflektierten Blitz stets nach der Emission, aber niemals vorher. Es gibt aber eine Alternative zur Maxwell'schen Elektrodynamik, nämlich die hauptsächlich auf Gauß, Schwarzschild, und Frenkel zurückgehende Fernwirkungstheorie der Elektrodynamik (siehe [8, 9] und die in diesen Artikeln angegebenen Quellen), die beansprucht alle beobachtbaren elektrodynamischen Phänomene in gleicher Weise beschreiben zu können. In dieser Theorie sind die Felder keine eigenständigen physikalischen Objekte, vielmehr gibt es nur geladene Teilchen, die einander durch Fernwirkung beeinflussen. Die Felder der Maxwell'schen Theorie haben in der Fernwirkungstheorie lediglich den Status von Rechengrößen auf dem Papier des Theoretikers. Wir werden auf diese Theorie nicht eingehen, wollen uns aber die Option auf beide klassischen elektrodynamischen Theorien offenhalten. Deshalb behalten wir sowohl die retardierten Felder wie auch die avancierten Felder weiterhin bei.

Im Fall $\mathbf{v} \neq 0$ und $\dot{\mathbf{v}} = 0$ nimmt $\mathbf{B}_s^{(g)}$ proportional zu \mathbf{v} zu. Der Ort \mathbf{r} der Quelle, ihre Geschwindigkeit \mathbf{v} , und der Beobachtungspunkt \mathbf{x} definieren die Ebene der linken Skizze in Abb. 2. Im



Abb. 2: **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** der Quelle

skizzierten Beispiel weist $\mathbf{B}_s^{(g)} \sim -q\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ bei positiver Ladung ($q > 0$) der Quelle senkrecht aus der Zeichenebene nach oben. $\mathbf{E}_s^{(g)} \sim \mathbf{n} \mp \mathbf{v}/c$ liegt in der Zeichenebene. Nur im hoch relativistischen Fall $v \rightarrow c$ kann die Richtung von $\mathbf{E}_s^{(g)}$ wesentlich von \mathbf{n} abweichen.

Die Energie, welche die Felder \mathbf{E}_s und \mathbf{B}_s pro Zeit durch eine Fläche \mathbf{f} transportieren, ist gleich $\mathbf{S} \cdot \mathbf{f}$, wobei

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_s \times \mathbf{B}_s \stackrel{(58)}{=} \pm \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_s \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}_s) \quad (63)$$

der Poynting-Vektor ist. Im statischen Fall $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} = 0$ ist er Null wegen $\mathbf{B}_s = 0$. Aber auch im Fall $\mathbf{v} \neq 0$ und $\dot{\mathbf{v}} = 0$ wird keine Leistung von der Quelle abgestrahlt. Denn wegen $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$ ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\sim (\pm)(\mp)(\mathbf{n} \mp \mathbf{v}/c) \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}/c) = \\ &= -\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}/c) \pm \mathbf{v} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}/c^2) . \end{aligned}$$

Der erste Term steht senkrecht auf \mathbf{n} , d. h. dieser Teil der Leistung fließt um die Quelle herum, aber nicht von der Quelle weg oder auf die Quelle zu. Der zweite Term, der nur im hoch relativistischen Fall die gleiche Größenordnung erreicht wie der erste, hat zwar eine von Null verschiedene Komponente in Richtung \mathbf{n} . Wenn man aber über die Oberfläche einer Kugel integriert, in deren Mittelpunkt sich die Quelle befindet, dann wird der Beitrag in Richtung \mathbf{n} durch einen gleich großen aber umgekehrt gerichteten Energiestrom in Richtung $-\mathbf{n}$ kompensiert. Der Netto-Energiestrom durch die Oberfläche ist Null. Auch der zweite Term beschreibt nur die Feldenergie, welche die Quelle mit sich führt, es wird keine Energie abgestrahlt oder absorbiert.

Alternative Begründung: Man geht von der Tatsache aus, dass eine ruhende Ladung keine Energie abstrahlt. Zur Beschreibung

einer gleichmäßig bewegten Quelle mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} betrachtet man die gleiche Quelle aus einem Inertialsystem, das sich relativ zur Quelle mit der Geschwindigkeit $-\mathbf{v}$ bewegt. Diese Transformation kann nichts an der physikalischen Tatsache ändern, dass die Quelle keine Leistung abstrahlt.

Der Sachverhalt lässt sich auch in nochmals etwas anderer Weise plausibel machen: Angenommen, eine gleichmäßig bewegte Ladung würde Energie abstrahlen. Falls der Satz von der Energieerhaltung gilt, müsste die Ladung deshalb kinetische Energie verlieren und schließlich zur Ruhe kommen. Das würde aber bedeuten, dass unter den mit gleichmäßiger Geschwindigkeit zueinander bewegten Inertialsystemen eines besonders ausgezeichnet wäre, nämlich dasjenige in dem ruhende Ladungen nicht strahlen. Das wäre unvereinbar mit den grundlegenden Prinzipien der Speziellen Relativitätstheorie.

Im Fall $\dot{\mathbf{v}} \neq 0$ treten zusätzlich zu den Geschwindigkeitsfeldern $\mathbf{E}_s^{(g)}$ und $\mathbf{B}_s^{(g)}$ die Beschleunigungsfelder $\mathbf{E}_s^{(s)}$ und $\mathbf{B}_s^{(s)}$ auf. Sie sind proportional zu R^{-1} , während die Geschwindigkeitsfelder proportional zu R^{-2} sind. Oben haben wir festgestellt, dass die Geschwindigkeitsfelder nicht zur Abstrahlung von Energie beitragen. Zu diesem Ergebnis hätten wir auch viel einfacher gelangen können: Wenn eine Quelle Energie abstrahlt, dann wird der Energiestrom pro Fläche in großer Entfernung R von der Quelle wie R^{-2} abnehmen (weil eine Kugel die Oberfläche $4\pi R^2$ hat). Aus (57a) und (57c) liest man aber unmittelbar ab:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &\sim \mathbf{E}_s \times \mathbf{B}_s = \left(\mathbf{E}_s^{(g)} + \mathbf{E}_s^{(s)} \right) \times \left(\mathbf{B}_s^{(g)} + \mathbf{B}_s^{(s)} \right) = \\ &= \underbrace{\mathbf{E}_s^{(g)} \times \mathbf{B}_s^{(g)}}_{\sim R^{-4}} + \underbrace{\mathbf{E}_s^{(g)} \times \mathbf{B}_s^{(s)}}_{\sim R^{-3}} + \underbrace{\mathbf{E}_s^{(s)} \times \mathbf{B}_s^{(g)}}_{\sim R^{-3}} + \underbrace{\mathbf{E}_s^{(s)} \times \mathbf{B}_s^{(s)}}_{\sim R^{-2}} \quad (64) \end{aligned}$$

Also brauchen wir bei der Untersuchung der Abstrahlung von Energie nur die Beschleunigungsfelder zu betrachten, die aus diesem Grund auch als Strahlungsfelder bezeichnet werden. Der aus ihnen

gebildete Poynting-Vektor am Ort \mathbf{x} zur Zeit t ist

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_s^{(s)} \times \mathbf{H}_s^{(s)} \stackrel{(58)}{=} \pm \frac{1}{c\mu_0} \mathbf{E}_s^{(s)} \times \left(\mathbf{n}(\tau_s) \times \mathbf{E}_s^{(s)} \right)$$

$$|\mathbf{S}| = \frac{1}{c\mu_0} |\mathbf{E}_s^{(s)}|^2 \quad , \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \neq 0 . \quad (65)$$

Man beachte das negative Vorzeichen des avancierten Poynting-Vektors: Das avancierte Feld breitet sich entgegen der „gewohnten“ Zeitrichtung aus der Zukunft in die Vergangenheit aus. Durch die Brille der gewohnten Zeitrichtung betrachtet bilden die avancierten Strahlungsfelder eine Kugelwelle, die – aus dem unendlichen kommend – auf den Ort der Quelle kollabiert.

Alle bisher angegebenen Formeln gelten für beliebige, also auch relativistische Geschwindigkeiten der Quelle q . Die nicht-relativistischen Näherungen der Strahlungsfelder können aus (57) und (58) leicht abgelesen werden:

$$\mathbf{E}_s^{(s)}(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{v}})}{Rc^2} \Big|_{\tau_s} \quad (66a)$$

$$|\mathbf{E}_s^{(s)}(x)| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q \sin(\mathbf{n}, \dot{\mathbf{v}})|}{Rc^2} \Big|_{\tau_s} \quad (66b)$$

$$c\mathbf{B}_s^{(s)}(x) = \pm \mathbf{n}(\tau_r) \times \mathbf{E}_r^{(s)}(x) \quad (66c)$$

falls $v/c \ll 1$, mit $t = \tau_s \pm R/c = \tau_r + R/c = \tau_a - R/c$

$\mathbf{E}_s^{(s)}$ liegt im nichtrelativistischen Fall in der durch \mathbf{n} und $\dot{\mathbf{v}}$ definierten Ebene (siehe rechte Skizze in Abb. 2), steht senkrecht auf \mathbf{n} , und der Winkel $(\mathbf{E}_s^{(s)}, \dot{\mathbf{v}})$ ist stets $\geq \pi/2$. Im Beispiel von Abb. 2 weist $\mathbf{E}_s^{(s)}$ bei $q > 0$ etwa in Richtung 8 Uhr. Der retardierte Vektor $\mathbf{B}_r^{(s)}$ weist in diesem Fall senkrecht nach oben aus der Zeichenebene heraus, der avancierte Vektor $\mathbf{B}_a^{(s)}$ weist senkrecht nach unten in die Zeichenebene hinein.

Um die Strahlungsleistung dP zu berechnen, die dabei eine infinitesimale Fläche $d\mathcal{V} \, d\varphi$ im Abstand R von der Quelle durchdringt,

wählen wir ein Kugelkoordinatensystem so, dass die Quelle sich im Ursprung befindet ($\mathbf{r} = 0$) und die Richtung $\vartheta = 0$ parallel zu $\dot{\mathbf{v}}$ ist, siehe die rechte Skizze von Abbildung 2. (Es handelt sich also um ein beschleunigtes Koordinatensystem, was aber für unsere nicht-relativistische Überlegung belanglos ist.) Es gilt

$$\frac{dP}{R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi} = \frac{|\mathbf{E}_s^{(s)}|^2}{c\mu_0} \stackrel{(66a)}{=} \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{q \dot{\mathbf{v}}}{4\pi\epsilon_0 R c^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta . \quad (67)$$

Man beachte die durch $\sin^2 \vartheta$ beschriebene Abhängigkeit der Strahlungsleistung von der Richtung der Beschleunigung. Die gesamte abgestrahlte Leistung ergibt sich aus dem Integral

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi d\vartheta \, R^2 \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{1}{c\mu_0} \left(\frac{q \dot{\mathbf{v}}}{4\pi\epsilon_0 R c^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{q^2 \dot{v}^2}{8\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi d\vartheta \, \sin^3 \vartheta = \frac{2q^2 \dot{v}^2}{3c^3 (4\pi\epsilon_0)} . \end{aligned} \quad (68a)$$

Diese Formel wurde 1897 von Larmor angegeben. Um das entsprechende Ergebnis für den relativistischen Fall $v \rightarrow c$ herzuleiten könnte man versuchen, die gleiche Rechnung mit den relativistischen Feldern (57) durchzuführen. Es geht aber auch viel einfacher. Wir suchen eine relativistisch kovariante, d. h. ausschließlich mithilfe von Lorentz-Tensoren formulierte Gleichung, die sich im Grenzfall $v \ll c$ auf (68a) reduziert, und außerdem im Hinblick auf (57) nur von \mathbf{v} und $\dot{\mathbf{v}}$ abhängen soll. Wenn man die nichtrelativistische Formel (68a) in der Form

$$P = \frac{2q^2}{3c^3 (4\pi\epsilon_0) m^2} \left(\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right)^2$$

schreibt, in der m die Masse der Ladung und \mathbf{p} ihr Impuls ist, dann ist es plausibel dass die relativistische Verallgemeinerung von (68a)

$$P = -\frac{2q^2}{3c^3(4\pi\epsilon_0)m^2} \left(\frac{d\mathbf{p}}{d\tau}\right)^2 \quad (68b)$$

ist. $d\mathbf{p}/d\tau$ ist die Ableitung des Vierer-Impulses des Teilchens nach seiner Eigenzeit τ . Zur Probe setzen wir $p = (E/c, \mathbf{p}) = \gamma(mc, m\mathbf{v})$ ein, und erhalten

$$\begin{aligned} P &= -\frac{2q^2}{3c^3(4\pi\epsilon_0)} \left[\left(\frac{mc}{mc} \frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2 - \frac{m}{m} \left(\frac{d\gamma\mathbf{v}}{d\tau}\right)^2 \right] \\ &\approx \frac{2q^2}{3c^3(4\pi\epsilon_0)} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^2 \quad \text{für } \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \end{aligned}$$

3. Strahlungsrückwirkung: Energieerhaltung

Im vorigen Abschnitt haben wir die retardierten und avancierten Felder berechnet, die von einer beschleunigten Punktladung abgestrahlt werden. Woher kommt die abgestrahlte Energie? Sie kann nur aus der kinetischen Energie des strahlenden Teilchens kommen, d. h. das strahlende Teilchen muss abgebremst werden. Diese bremsende Wirkung wird als Strahlungs-Rückwirkung bezeichnet.

Unsere Diskussion der Strahlungsrückwirkung folgt in weiten Teilen Jackson [4, Kap. 16]. Die Beschleunigung des geladenen Teilchens durch die äußere Kraft \mathbf{F}_{ext} bewirkt eine Zunahme seiner kinetischen Energie. Gleichzeitig geht aber auch Energie durch Strahlung verloren. Auch dieser Teil der Energie muss durch die äußere Kraft aufgebracht werden. Deshalb kann man die Kraft \mathbf{F}_{ext} formal zerlegen in einen Anteil \mathbf{F}_{bes} , der das Teilchen beschleunigt, und einen Anteil \mathbf{F}_{str} , der die abgestrahlte Energie aufbringt.

Wir nehmen in der folgenden nicht-relativistischen Untersuchung an, dass die Geschwindigkeit $\mathbf{v} \neq 0$ des geladenen Teilchens ver-

schieden von Null ist. Das bedeutet keine Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit unserer Überlegungen, denn es ist stets möglich die Berechnungen in einem Inertialsystem durchzuführen, in dem $\mathbf{v} \neq 0$ ist. Im Zeitraum $t_2 - t_1$ leistet $\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{bes}} + \mathbf{F}_{\text{str}}$ die Arbeit

$$\int_{t_1}^{t_2} dt (\mathbf{F}_{\text{bes}} + \mathbf{F}_{\text{str}}) \cdot \mathbf{v} \stackrel{(68a)}{=} \int_{t_1}^{t_2} dt \left(m \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \frac{2q^2 \dot{\mathbf{v}}^2}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \right). \quad (69)$$

Um einen expliziten Ausdruck für \mathbf{F}_{str} abzuleiten, integrieren wir den zweiten Term partiell:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \mathbf{F}_{\text{str}} \cdot \mathbf{v} = \frac{2q^2 \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{2q^2 \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \quad (70)$$

Im Folgenden werden wir ausschließlich den Fall betrachten, dass der erste Summand auf der rechten Seite Null ist. Das ist der Fall, wenn entweder die äußere Kraft nur während eines begrenzten Zeitintervalls $t'_1 \dots t'_2$ wirkt (dann wählt man $t_1 < t'_1$ und $t_2 > t'_2$, so dass $\dot{\mathbf{v}}(t_1) = \dot{\mathbf{v}}(t_2) = 0$ ist), oder wenn es sich um einen periodischen Vorgang handelt (dann können die Zeitpunkte t_1 und t_2 stets so gewählt werden, dass der erste Summand auf der rechten Seite Null ist). Wenn beispielsweise ein Elektron in einer Antenne auf und ab beschleunigt wird, dann ist an den Umkehrpunkten $\mathbf{v} = 0$. Wenn das Teilchen auf eine elliptische Bahn beschleunigt wird, dann gilt zu zwei Zeitpunkten $\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} = 0$. In all diesen Fällen müssen die Integranden der verbleibenden Terme gleich sein:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{str}} \cdot \mathbf{v} &= -\frac{2q^2 \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \\ |\mathbf{F}_{\text{str}}| \cos(\mathbf{F}_{\text{str}}, \mathbf{v}) &= -\frac{2q^2 |\ddot{\mathbf{v}}|}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \cos(\ddot{\mathbf{v}}, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (71)$$

Dies muss für beliebige Winkel ($\mathbf{F}_{\text{str}}, \mathbf{v}$) gelten, also müssen die Winkel ($\mathbf{F}_{\text{str}}, \mathbf{v}$) und $(\ddot{\mathbf{v}}, \mathbf{v})$ stets gleich sein. Wenn $\ddot{\mathbf{v}}$ eine andere Richtung als \mathbf{F}_{str} hätte, dann müsste man fragen: warum gerade diese Richtung? Auf diese Frage gibt es in der Symmetrie des Modells keine Antwort. Also müssen diese beiden Vektoren parallel sein, woraus

$$\mathbf{F}_{\text{str}} = -\frac{2q^2\ddot{\mathbf{v}}}{3c^34\pi\epsilon_0} \quad (72)$$

folgt. Mit diesem Ausdruck erhält man als Bewegungsgleichung des geladenen Teilchens

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{bes}} + \mathbf{F}_{\text{str}} = m\dot{\mathbf{v}} - \frac{2q^2}{3c^34\pi\epsilon_0} \ddot{\mathbf{v}} \quad (73)$$

\mathbf{F}_{str} hängt nur von $\ddot{\mathbf{v}}$ und vom Betrag der Ladung des beschleunigten Teilchens ab.

In dieser Gleichung werden die Grenzen des klassischen Modells der Strahlung und Strahlungsrückwirkung deutlich erkennbar. Zum einen hat sie für $\mathbf{F} = 0$ neben der vernünftigen Lösung $\dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{v}} = 0$ auch noch die unsinnige „run-away“-Lösung $\dot{\mathbf{v}} = \exp\{+t3c^34\pi\epsilon_0m/(2q^2)\}$. Man kann die unsinnige Lösung vermeiden, indem man neben Ort und Geschwindigkeit der strahlenden Ladung zur Zeit t_0 auch $\dot{\mathbf{v}}(t \rightarrow \infty) = 0$ als dritte Randbedingung vorgibt. Dazu bemerkte Dirac [5, Seite 158] in seiner Diskussion der Gleichung (73): “We now have a striking departure from the usual ideas of mechanics. We must obtain solutions of our equations of motion for which the initial position and velocity of the electron are prescribed, together with its final acceleration, instead of solutions with all the initial conditions prescribed.”

Es kommt aber noch merkwürdiger: In der zitierten Arbeit betrachtet Dirac auch eine Beschleunigung eines Elektrons, die nur für sehr kurze Zeit (pulsartig) wirksam ist. Dabei stellt er

fest [5, Gleichung (35)], dass das Elektron bereits beschleunigt wird, *bevor* der Puls bei ihm eintrifft. Das wird in der Literatur oft als „pre-acceleration“ bezeichnet. Eine lesenswerte Diskussion der befremdlichen Ergebnisse und Paradoxa, welche die klassische Behandlung von Strahlung und Strahlungsrückwirkung nach sich zieht, wurde von K. Brown [10] veröffentlicht.

Angesichts so abwegiger Ergebnisse kann man die Flucht nach hinten oder nach vorne antreten. Die Flucht nach hinten funktioniert folgendermaßen: Unsere Herleitung von (73) basiert auf der Larmor-Formel (68a), die wir wiederum aus den Formeln (57) abgeleitet haben, welche die Felder einer Punktladung q beschreiben. Medina [11] führt gute Gründe dafür an, dass die Annahme von Punktladungen (wobei der Begriff Punkt im strengen mathematischen Sinn gemeint ist) unvereinbar mit der klassischen Elektrodynamik ist. Unter der Voraussetzung dass im Rahmen einer klassischen Theorie der Radius eines geladenen Teilchens niemals kleiner als der klassische Radius (95) angenommen werden darf, findet Medina [11, (96)] anstelle von (72) als Kraft der Strahlungs-Rückwirkung in nicht-relativistischer Näherung

$$\mathbf{F}_{\text{str}} = -\frac{2q^2}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \left(\ddot{\mathbf{v}} - \mathbf{v} \frac{(\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_{\text{bes}})}{c^2} \right).$$

Die Flucht nach vorne besteht darin, dass man grundsätzlich den Sinn einer klassischen Beschreibung von Strahlungsemission und Strahlungsrückwirkung in Zweifel zieht. Wir wissen, dass elektromagnetische Energie nicht in Form kontinuierlicher Wellen emittiert wird, sondern in Form von Photonen. Wenn eine beschleunigte Ladung in unregelmäßigen Abständen Photonen emittiert, dann wird sie bei jeder Emission einen Rückstoß erfahren, und ihre Beschleunigung ist nicht klar definiert. In dieser Sichtweise sollte man dann aber konsequenterweise überhaupt auf den Begriff der „Bahn“ $\mathbf{r}(t)$ eines Teilchens verzichten, so wie es Heisenberg [12] in seiner grund-

legenden Arbeit zur Quantenmechanik tat. Damit werden dann auch die Begriffe der Geschwindigkeit $\mathbf{v}(t)$ des Teilchens, seiner Beschleunigung $\dot{\mathbf{v}}(t)$, und der Ableitung $\ddot{\mathbf{v}}(t)$ der Beschleunigung obsolet.

Gleichung (73) wird nach ihren Entdeckern Abraham-Lorentz-Gleichung genannt. Die Forscher gaben sich mit dieser Lösung nicht zufrieden. Sie suchten nach einer Erklärung für \mathbf{F}_{str} , die unmittelbar aus den Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet werden sollte. Die Theorie, zu der sie dabei gelangten, werden wir im nächsten Abschnitt besprechen.

4. Strahlungsrückwirkung einer ausgedehnten Ladung

Abraham und Lorentz betrachteten als Quelle der Strahlung speziell ein beschleunigtes Elektron. Sie stellten sich dieses Teilchen nicht als Punktladung vor sondern nahmen an, dass seine Ladung über einen endlichen Raumbereich verteilt sei:

$$-e = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{C} \quad (74)$$

Das Integral ist über den gesamten Raumbereich zu erstrecken, in dem die Ladungsdichte $\rho(\mathbf{x})$ des Elektrons signifikant von Null abweicht.

Die Strahlungs-Rückwirkung ist im Modell von Abraham und Lorentz identisch mit Lorentzkraft, die das beschleunigte Elektron durch die von ihm abgestrahlten retardierten Felder $\mathbf{E}_r^{(s)}$ und $\mathbf{B}_r^{(s)}$ auf sich selbst ausübt. Es ist charakteristisch für ihre Untersuchung, dass die avancierten Felder $\mathbf{E}_a^{(s)}$ und $\mathbf{B}_a^{(s)}$ als unphysikalische Artefakte der Theorie betrachtet und von vornherein gestrichen werden. Wenn sich keine weiteren geladenen Teilchen in dem Raumbereich

befinden, über den integriert wird, dann kann diese Kraft als

$$\mathbf{F}^{(s)} = \int d^3x (\rho \mathbf{E}_r^{(s)} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}_r^{(s)}) \quad (75)$$

geschrieben werden. Bei der Berechnung dieses Integrals werden wir uns weiterhin an Jackson [4, Kap. 16] orientieren. Wir beschränken uns im Folgenden auf eine nicht-relativistische Beschreibung ($v \ll c$), und benutzen dabei ein Inertialsystem, in dem sich das Elektron so langsam bewegt, dass der zweite Summand in (75) gegenüber dem ersten vernachlässigt werden kann ($\mathbf{j} \times \mathbf{B}_r^{(s)} \ll \rho \mathbf{E}_r^{(s)}$). Ein solches Bezugssystem kann zumindest für ein kurzes Zeitintervall stets definiert werden. Wenn man $\mathbf{E}_r^{(s)}$ als Funktion des skalaren Potentials $\Phi_r^{(s)}$ und des Vektorpotentials $\mathbf{A}_r^{(s)}$ schreibt, gilt unter dieser Voraussetzung

$$\mathbf{F}^{(s)} = \int d^3x \rho \mathbf{E}_r^{(s)} = - \int d^3x \rho (\nabla \Phi_r^{(s)} + \dot{\mathbf{A}}_r^{(s)}) . \quad (76)$$

In diese Gleichung sind die retardierten Potentiale

$$A_r^\rho(x) \stackrel{(36e)}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \int_{-\infty}^{+\infty} dt_y \frac{j^\rho(y)}{R} \delta(t - t_y - R/c) \quad (77)$$

$$\text{mit } \mathbf{R} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y} \quad , \quad R \equiv |\mathbf{R}|$$

einzusetzen. Diese Potentiale berücksichtigen die endliche Zeit $t - t_y > 0$ welche die Felder brauchen um sich vom Punkt \mathbf{y} zum Punkt \mathbf{x} auszubreiten. Das Integral über t_y kann dank der Delta-Funktion leicht ausgeführt werden. In einer nicht-relativistischen Beschreibung mit $(j^\sigma) \approx (\rho c, \rho \mathbf{v})$ können die dreidimensionalen Potentiale folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_r^{(s)}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3y \frac{\rho(t_r, \mathbf{y})}{R} \\ \mathbf{A}_r^{(s)}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3y \frac{\mathbf{j}(t_r, \mathbf{y})}{R} \end{aligned} \right\} \text{mit } t_r = t - \frac{R}{c} \quad (78)$$

Im Modell von Abraham und Lorentz ist das Elektron zwar über einen endlichen, aber nur sehr kleinen Raumbereich ausgedehnt. In (95) werden wir den „klassischen Elektronenradius“ als $\approx 3 \cdot 10^{-15}\text{m}$ bestimmen. Also handelt es sich bei $t - t_r = R/c$ um ein sehr kleines Zeitintervall von etwa 10^{-23}s . Deshalb ist es sinnvoll, die retardierten Integranden von (78) in einer Taylorreihe um t (genauer gesagt: vor $t > t_r$) zu entwickeln:

$$j^\alpha(t_r, \mathbf{y}) = j^\alpha(t - R/c, \mathbf{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-R/c)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} j^\alpha(t, \mathbf{y}) \quad (79)$$

Die retardierten Potentiale (78) mit der Entwicklung (79) werden in (76) eingesetzt und $c^{-2} = \epsilon_0 \mu_0$ genutzt⁴:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(s)} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3x \int d^3y \rho(t, \mathbf{x}) \left[\right. \\ & \left. \nabla R^{n-1} \frac{d^n \rho(t, \mathbf{y})}{dt^n} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} R^{n-1} \frac{d^n \mathbf{j}(t, \mathbf{y})}{dt^n} \right] \end{aligned} \quad (80)$$

Zunächst ignorieren wir den zweiten Term in der eckigen Klammer. Wir nehmen an, dass $\rho(\mathbf{x})$ ein starres Gebilde mit Kugelsymmetrie ist. Dann ergibt der erste Term mit $n = 0$

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \int d^3y \rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{y}) \nabla R^{-1} = 0. \quad (81)$$

Denn aufgrund der Kugelsymmetrie gibt es für jeden positiven Beitrag einen gleich großen negativen Beitrag zum Integral. Mit

⁴ Die auf (16.24) folgende Formel in der dritten deutschsprachigen Auflage von Jackson [4] enthält einen Druckfehler: Das Minuszeichen zwischen den beiden letzten Termen in der eckigen Klammer muss durch einen Produkt-Punkt ersetzt werden. In der dritten englischen Auflage [6] und in der vierten deutschsprachigen Auflage [7] ist diese Formel korrekt abgedruckt.

$n = 1$ ist der erste Term in der eckigen Klammer von (80) ebenfalls null, weil er den Faktor $\nabla R^{1-1} = 0$ enthält. Mit

$$\nabla R^{n-1} = (n-1)R^{n-2} \frac{\mathbf{R}}{R} = (n-1)R^{n-3} \mathbf{R}$$

folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(s)} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^n} \int d^3x \int d^3y \rho(t, \mathbf{x}) \left[\frac{n!}{(n+2)! c^2} (n+1) \cdot \right. \\ & \left. \cdot R^{n-1} \mathbf{R} \frac{d^{n+2} \rho(t, \mathbf{y})}{dt^{n+2}} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} R^{n-1} \frac{d^n \mathbf{j}(t, \mathbf{y})}{dt^n} \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Wegen (35) können die Ableitungen nach t vor die eckige Klammer gezogen werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(s)} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \int d^3x \int d^3y \rho(t, \mathbf{x}) \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \left[\frac{1}{(n+2)} \cdot \right. \\ & \left. \cdot R^{n-1} \mathbf{R} \frac{d\rho(t, \mathbf{y})}{dt} + R^{n-1} \mathbf{j}(t, \mathbf{y}) \right] \end{aligned} \quad (83)$$

Aufgrund der Erhaltung der elektrischen Ladung gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \rho(t, \mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{y}).$$

Mit ihr ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{(s)} = & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x \rho(t, \mathbf{x}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \int d^3y R^{n-1} \left[\right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{R}}{(n+2)} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{y}) + \mathbf{j}(t, \mathbf{y}) \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

Am Rand des Volumens, über welches das Integral über \mathbf{y} ausgeführt wird, sind ρ bzw. \mathbf{j} gleich Null (bzw. vernachlässigbar klein).

Deshalb ergibt die partielle Integration des ersten Terms über \mathbf{y} abgesehen von konstanten Faktoren

$$\begin{aligned}
 & - \int d^3y R^{n-1} \frac{\mathbf{R}}{(n+2)} \nabla_y \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{y}) = \\
 & = + \int d^3y (\mathbf{j} \cdot \nabla_y) R^{n-1} \frac{\mathbf{R}}{(n+2)} \\
 & = \int d^3y \left(-(n-1)R^{n-3}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{R}) \frac{\mathbf{R}}{(n+2)} - R^{n-1} \frac{\mathbf{j}}{(n+2)} \right).
 \end{aligned}$$

Also ergibt das \mathbf{y} -Integral über die eckige Klammer von (84)

$$\begin{aligned}
 & \int d^3y R^{n-1} [\dots] = \\
 & = \int d^3y R^{n-1} \left[-(n-1)R^{-2}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{R}) \frac{\mathbf{R}}{(n+2)} + \frac{(n+1)\mathbf{j}}{(n+2)} \right].
 \end{aligned}$$

Da wir eine starre Ladungsverteilung annehmen, ist

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{y}) = \rho(t, \mathbf{y})\mathbf{v}(t). \quad (85)$$

Weil wir darüber hinaus eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung annehmen, mitteln sich bei den Integrationen über \mathbf{x} und \mathbf{y} alle Komponenten des Integranden, die senkrecht zu \mathbf{v} sind, heraus. Deshalb ändert sich der Wert des Integrals nicht, wenn man den Faktor \mathbf{R} in der eckigen Klammer mit dem Einheitsvektor \mathbf{v}/v multipliziert:

$$\begin{aligned}
 & \int d^3y R^{n-1} [\dots] = \int d^3y R^{n-1} \rho(t, \mathbf{y})\mathbf{v}(t) \cdot \\
 & \cdot \left[-\frac{(n-1)}{(n+2)} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2}{(vR)^2} + \frac{(n+1)}{(n+2)} \right] \quad (86)
 \end{aligned}$$

Weil \mathbf{R} unter dem Integral alle Richtungen mit gleicher Häufigkeit annimmt, kann $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2 / (vR)^2$ durch seinen Mittelwert

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{R})^2}{(vR)^2} \right\rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2(\mathbf{v}, \mathbf{R}) = \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^\pi = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ersetzt werden. Das führt zu

$$(86) = \int d^3y R^{n-1} \rho(t, \mathbf{y}) \mathbf{v}(t) \frac{2}{3} .$$

Also übt das vom Elektron selbst abgestrahlte Feld auf das Elektron die Kraft

$$\mathbf{F}^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{F}_n^{(s)} \quad (87a)$$

$$\mathbf{F}_n^{(s)} \stackrel{(84)}{=} -\frac{4}{3} U_n^{(s)} \frac{(-1)^n}{n! c^{n+2}} \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \mathbf{v}(t) \quad (87b)$$

$$U_n^{(s)} \equiv \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{y})}{4\pi\epsilon_0 R^{1-n}} \quad (87c)$$

aus. Weil wir eine starre Form und Ladungsverteilung des Elektrons annehmen, ist $U_n^{(s)}$ nicht von t abhängig, und konnte vor den Differentialquotienten gezogen werden. Die Kraft ist Null, wenn alle Ableitungen $d^{n+1}\mathbf{v}/dt^{n+1}$ Null sind, d. h. wenn das Elektron ruht oder sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Im Grenzfall eines punktförmigen Elektrons ($R \rightarrow 0$) würde $U_0^{(s)}$ divergieren, $U_1^{(s)}$ ist von R unabhängig, und $U_n^{(s)}$ mit $n \geq 2$ würde gegen Null konvergieren. Weil wir ein endlich ausgedehntes, aber kleines Elektron mit einem Radius von etwa $3 \cdot 10^{-15}\text{m}$ annehmen (diese Annahme werden wir gleich begründen), sind die Terme mit $n \geq 2$

zwar von Null verschieden, das Ergebnis wird aber von den beiden Summanden mit $n = 0$ und $n = 1$ dominiert. Man sieht das, wenn man die Größenordnung der Terme n und $n - 1$ (wobei $n \geq 2$ sein soll) miteinander vergleicht:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{F}_n^{(s)}|}{|\mathbf{F}_{n-1}^{(s)}|} &\approx \frac{R \left| \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \mathbf{v}(t) \right|}{c \left| \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{v}(t) \right|} \approx \\ &\approx 10^{-23} \quad \text{falls} \quad \left| \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}} \mathbf{v}(t) \right| / \left| \frac{d^n}{dt^n} \mathbf{v}(t) \right| \approx 1 \end{aligned} \quad (88)$$

Wegen der Kleinheit von R kann man in ausgezeichnete Näherung alle Summanden mit $n \geq 2$ vernachlässigen, und erhält die Strahlungsrückwirkung

$$\mathbf{F}^{(s)} = \mathbf{F}_0^{(s)} + \mathbf{F}_1^{(s)} = -\frac{4}{3} \frac{U_{s0}}{c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{4}{3} \frac{U_{s1}}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}. \quad (89)$$

Der Summand $\mathbf{F}_0^{(s)}$ enthält die elektrostatische Selbstenergie

$$U_0^{(s)} \stackrel{(87)}{=} \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{y})}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (90)$$

des Elektrons. Dies ist die Arbeit die man leisten müsste, um die gesamte Ladung des Elektrons aus unendlichem Abstand entgegen der elektrostatischen Abstoßung auf ihre Position im Elektron zusammenzuführen.

Mit

$$U_1^{(s)} \stackrel{(87)}{=} \frac{1}{2} \int d^3x \int d^3y \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{y})}{4\pi\epsilon_0 R^{1-1}} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \quad (91)$$

kann die Strahlungsrückwirkung geschrieben werden als

$$\mathbf{F}^{(s)} \approx -\frac{4}{3} \frac{U_0^{(s)}}{c^2} \dot{\mathbf{v}} + \frac{2e^2}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \ddot{\mathbf{v}}, \quad (92a)$$

was mit

$$\mathbf{F} \stackrel{(73)}{=} \mathbf{F}_{\text{bes}} + \mathbf{F}_{\text{str}} = m\dot{\mathbf{v}} - \frac{2e^2}{3c^3 4\pi\epsilon_0} \ddot{\mathbf{v}} \quad (92b)$$

verglichen werden sollte. Die Vorzeichen sind unterschiedlich, weil \mathbf{F} in (73) als Kraft definiert wurde, die von außen auf das Elektron wirkt, und deshalb die umgekehrte Richtung hat wie die vom Elektron auf sich selbst ausgeübte Rückwirkungskraft $\mathbf{F}^{(s)}$. Da in (92) die jeweils zweiten Summanden identisch sind ist es naheliegend, auch die zu $\dot{\mathbf{v}}$ proportionalen Terme miteinander zu identifizieren. Man definiert die „elektrostatische Masse“ des Elektrons durch

$$m_e \equiv \frac{4}{3} \frac{U_0^{(s)}}{c^2} , \quad (93)$$

und erhält dadurch die Gleichung

$$\mathbf{F}_0^{(s)} = -m_e \dot{\mathbf{v}} . \quad (94)$$

Bald darauf (nämlich 1905) entdeckte Einstein den Zusammenhang $E = mc^2$ zwischen Energie und träger Masse. Die von Abraham und Lorentz gefundene träge Masse m_e unterscheidet sich davon durch den eigenartigen Faktor $4/3$. Hinsichtlich der Klärung dieses Faktors verweisen wir nochmals auf die Arbeit von Medina [11]. Davon abgesehen braucht die Theorie von Abraham und Lorentz also keinen besonderen Masseparameter, sondern kann die Trägheit des Elektrons durch die Selbst-Wechselwirkung seiner Ladung erklären! Man definiert den „klassischen Elektronenradius“ r_e als gewichtetes Mittel von $2R$ im Integral (90):

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_e} &\equiv \int d^3x \int d^3y \frac{\rho(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{y})}{4\pi\epsilon_0 2R} \stackrel{(90)}{=} U_0^{(s)} \\ \implies r_e &= \frac{4}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx \frac{4}{3} 2.8 \cdot 10^{-15} \text{m} \approx 3.8 \cdot 10^{-15} \text{m} . \quad (95) \end{aligned}$$

Diesen Zahlenwert erhält man, wenn man den experimentell beobachteten Wert $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ einsetzt. Wenn man statt m_e die Masse $m = U_0^{(s)}/c^2 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ nach Einstein einsetzt, erhält man $r_e \approx 2.8 \cdot 10^{-15} \text{m}$.

Das Elektronenmodell von Abraham und Lorentz stellte am Ende des neunzehnten Jahrhunderts einen bemerkenswerten Fortschritt der Theorie dar, weil es plausible Erklärungen für

- * die träge Masse des Elektrons und für
- * die Strahlungsrückwirkung

liefert. Dass beide Erklärungen eng miteinander zusammenhängen verstärkt seine Überzeugungskraft. Es hat aber auch mehrere schwerwiegende Schwachpunkte. Die beiden offensichtlichsten und wichtigsten sind:

- * Es ist bis heute (2013) keine Kraft bekannt, die das Elektron entgegen der elektrostatischen Abstoßung seiner Bestandteile in dem kleinen Volumen von $4\pi r_e^3/3 \approx 10^{-43} \text{m}^3$ zusammenhalten könnte.
- * Es ist inzwischen experimentell gesichert dass der Radius eines Elektrons, falls er eine endliche Größe haben sollte, kleiner als $2 \cdot 10^{-22} \text{m}$ sein muss [13]. (Bemerkenswerterweise resultiert diese Obergrenze nicht aus Hochenergie-Kollisionsexperimenten mit Leptonen, die den Radius des Elektrons nur auf $< 10^{-18} \text{m}$ abschätzen können, sondern aus der Untersuchung des anomalen magnetischen Moments des Elektrons.) Der klassische Elektronenradius ist um mehr als den Faktor 10^7 größer als mit der Beobachtung verträglich.

Literatur

- [1] Gerold Gründler: *Grundlagen der Relativistischen Quantenfeldtheorie* (APIN, Nürnberg, 2012)
<http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/Feldtheorie.pdf>
- [2] *Elemente der Funktionentheorie*,
APIN Mitteilung sd98027 (2010)
<http://www.astrophys-neunhof.de/mtlg/sd98027.pdf>
- [3] Walter Greiner: *Klassische Elektrodynamik*
(Harri Deutsch, Frankfurt a. M., 2008)
- [4] John David Jackson: *Klassische Elektrodynamik*
(de Gruyter, Berlin, 3. Aufl., 2002)
- [5] P. A. M. Dirac: *Classical theory of radiating electrons*,
Proc. Roy. Soc. (London) A **167**, 148 - 169 (1938),
<http://dx.doi.org/10.1098/rspa.1938.0124>
- [6] John David Jackson: *Classical Electrodynamics*
(John Wiley, New York, USA, 3rd ed. 2001)
- [7] John David Jackson: *Klassische Elektrodynamik*
(de Gruyter, Berlin, 4. Aufl., 2006)
- [8] J. A. Wheeler, R. P. Feynman: *Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action*,
Rev. Mod. Phys. **21**, 425-433 (1949)
- [9] F. Hoyle, J. V. Narlikar: *Cosmology and action-at-a-distance electrodynamics*, Rev. Mod. Phys. **67**, 113-155 (1995),
http://www.iucaa.ernet.in:8080/jspui/bitstream/11007/1410/1/231C_1995.pdf

- [10] Kevin Brown: *Does A Uniformly Accelerating Charge Radiate?*, <http://www.mathpages.com/home/kmath528/kmath528.htm>
- [11] R. Medina: *Radiation reaction of a classical quasi-rigid extended particle*, J. Phys. A **39**, 3801–3816 (2006)
<http://arxiv.org/abs/physics/0508031>
- [12] Werner Heisenberg: *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*, Zeits. f. Phys. **33**, 879-893 (1925)
- [13] S. J. Brodsky, S. D. Drell: *Anomalous magnetic moment and limits on fermion substructure*, Phys. Rev. D **22**, 2236-2243 (1980)
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.22.2236>