

## Evaneszente Elektromagnetische Felder

*Wenn elektromagnetische Wellen an der Grenzfläche zu einem optisch dünneren Medium vollständig ins dichtere Medium reflektiert werden (totale innere Reflektion), dann treten im optisch dünneren Medium exponentiell abfallende evaneszente Felder auf. In dieser Mitteilung wird gezeigt, dass die Beschreibung der evaneszenten Felder vollständig im Rahmen der Maxwell'schen Theorie möglich ist, und keine „neue Physik“ erfordert. Außerdem werden das Snellius'sche Brechungsgesetz, die Fresnel-Koeffizienten, sowie die Phasenwinkel aller Felder für beliebige unter- und überkritische Einfallswinkel der Strahlung abgeleitet. Mithilfe der Stokes-Relationen werden explizite Formeln für die frustrierte totale innere Reflektion (FTIR) berechnet.*

### Inhalt

1. Einleitung .....	2
2. Beobachtungen evaneszenter Felder .....	4
3. Brechungsgesetz und kritischer Winkel .....	8
4. Fresnel-Koeffizienten und Phasenwinkel .....	25
5. Mehrlagen-Stapel und FTIR .....	59
Literatur .....	86

## 1. Einleitung

Wenn elektromagnetische Strahlung, aus einem transparenten Medium mit dem Brechungsindex  $n_a$  kommend, unter dem Winkel  $\vartheta_e$  auf die ebene Grenzfläche zu einem anderen, ebenfalls transparenten Medium mit dem Brechungsindex  $n_b$  trifft, dann wird sie im allgemeinen teilweise unter dem Winkel  $\vartheta_b$  ins Medium  $b$  gebrochen und teilweise unter dem Winkel  $\vartheta_r$  ins Medium  $a$  reflektiert, siehe Abbildung 1.

Der Zusammenhang zwischen den Winkeln und den Brechungsindizes der beiden Medien ist seit dem frühen 17. Jahrhundert bekannt. Er wird durch das Snellius'sche Brechungsgesetz beschrieben:

$$\vartheta_r = \vartheta_e \quad (1a)$$

$$n_a \sin \vartheta_e = n_b \sin \vartheta_b \quad (1b)$$

Zweihundert Jahre später gab Fresnel präzise Formeln für die Amplituden der gebrochenen und der reflektierten Strahlung an. In den Abschnitten 3 und 4 werden wir sowohl das Brechungsgesetz von Snellius als auch die Fresnel'schen Formeln aus den Maxwell'schen Gleichungen ableiten.

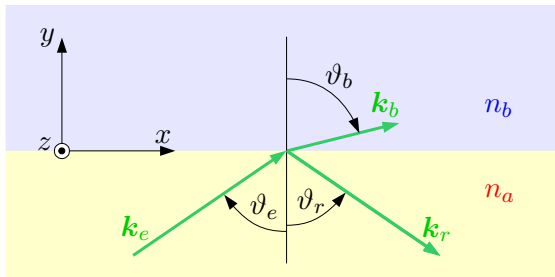


Abb. 1: Winkel und Koordinaten

Das Snellius'sche Brechungsgesetz hat nur für

$$\frac{n_a}{n_b} \sin \vartheta_e = \sin \vartheta_b \leq 1 \quad (2)$$

reelle Lösungen. Im Fall  $n_a > n_b$  ist diese Bedingung für hinreichend große Einfallswinkel  $\vartheta_e < \pi/2$  nicht erfüllt. Der Winkel

$$\vartheta_{e,\text{kritisch}} = \arcsin\left(\frac{n_b}{n_a}\right) \quad (3)$$

wird als kritischer Winkel bezeichnet. Strahlung, die unter einem Winkel  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  einfällt, wird erfahrungsgemäß zu 100% zurück ins Medium  $a$  reflektiert.

Überraschenderweise sind die elektromagnetischen Felder im Medium  $b$  auch bei überkritischen Einfallswinkeln der Strahlung nicht Null. Ihre Intensität fällt vielmehr im Medium  $b$  nur exponentiell mit der Entfernung von der Grenzfläche ab. Diese exponentiell abfallenden Felder im Medium  $b$  werden als „evaneszente Felder“ bezeichnet. Experimentelle Belege für die Existenz der evaneszenten Felder werden wir in Abschnitt 2 angeben.

Aus Abb. 1 kann man  $k_{b,y} = k_b \cos \vartheta_b$  ablesen. Diese Skizze beschreibt jedoch nur den Fall unterkritischer Einfallswinkel. Es ist unmöglich, den Winkel  $\vartheta_b$  im Fall  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  graphisch darzustellen. Die beiden führenden Lehrbücher der klassischen Optik und Elektrodynamik, nämlich Born und Wolf [1], sowie Jackson [2, 3], und in ihrer Nachfolge sämtliche anderen mir bekannten Lehrbücher, stützen sich bei der Herleitung der Theorie der evaneszenten Felder – ohne Beweis! – auf die Annahme, dass sowohl die Relation  $k_{b,y} = k_b \cos \vartheta_b$  als auch das Brechungsgesetz (1b) auch für überkritische Einfallswinkel gelten. Dann muss wegen  $\sin \vartheta_b > 1$  der Winkel  $\vartheta_b \in \mathbb{C}$  komplex sein, und folglich muss  $k_{b,y} \in \mathbb{C}$  ebenfalls komplex sein.

Während das Brechungsgesetz für unterkritische Winkel aus den Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet wird, werden die komplexen

Brechungswinkel in der Literatur an dieser Stelle ohne theoretische Begründung ad-hoc eingeführt, und bleiben deshalb ziemlich rätselhaft. Die Ergebnisse werden zwar durch die experimentellen Beobachtungen bestätigt, es bleibt aber unklar ob sich die Theorie der evaneszenten Felder im Rahmen der Maxwell'schen Theorie bewegt, oder ob irgend eine Form von „neuer Physik“ benötigt wird.

Es erscheint mir wesentlich „natürlicher“ in umgekehrter Reihenfolge vorzugehen, nämlich zunächst zu beweisen dass der Ansatz

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi_E)} \quad (4a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{B}}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t+\varphi_B)} \quad (4b)$$

auch evaneszente Felder beschreiben kann, wenn man komplexe Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  zulässt. Darauf aufbauend *kann* man dann zum Zweck einer besonders übersichtlichen Darstellung im zweiten Schritt komplexe Winkel einführen. Die komplexen Winkel spielen aber in unserer Darstellung keine essentielle Rolle; nur die komplexen Wellenzahlen sind unverzichtbar. Eine Welle mit komplexer Wellenzahl ist als exponentiell gedämpfte Welle wohlbekannt und anschaulich leicht interpretierbar – ganz im Gegensatz zu einem komplexen Winkel.

## 2. Beobachtungen evaneszenter Felder

Wenn eine elektromagnetische Welle, aus dem optisch dichteren Medium  $a$  kommend, unter einem Winkel  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  auf die Grenze zu einem optisch dünneren Medium  $b$  trifft und total reflektiert wird, dann dringt sie ein kleines Stück (quantitative Angaben sogleich) ins Medium  $b$  ein, bevor sie ins Medium  $a$  zurückkehrt. Es sind vor allem zwei Beobachtungen, die diese Tatsache belegen:

Die „frustrierte totale innere Reflexion“ (FTIR), und die Goos-Hänchen-Verschiebung.

Die FTIR ist seit Jahrhunderten bekannt, schon Newton erwähnt sie in den „Opticks“ [4, Second Book, Part I, Observation 1]. Ein oft

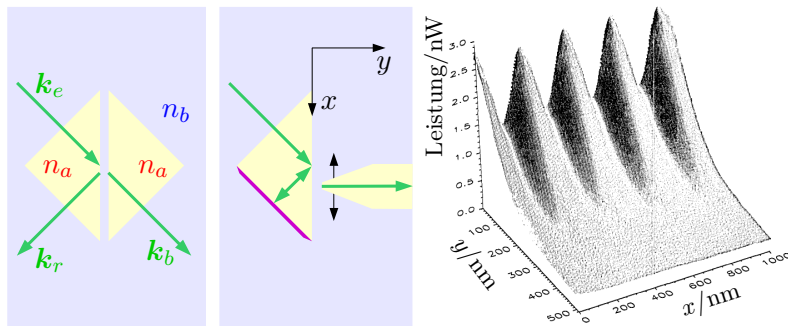


Abb. 2: Frustrierte totale innere Reflexion

benutzter Versuchsaufbau zum Nachweis der FTIR ist in der linken Skizze von Abb. 2 gezeigt. Eine elektromagnetische Welle trifft unter einem Winkel von  $45^\circ$  von innen auf die Hypotenuse eines gleichschenkligen Prismas. Falls  $n_a > n_b$  und  $\vartheta_{e,\text{kritisch}} < 45^\circ$  ist, wird die Welle total reflektiert. Wenn man jedoch ein zweites Prisma so anordnet, dass der Abstand zwischen den beiden Hypotenusen nicht mehr als etwa eine Wellenlänge beträgt, dann tritt doch ein kleiner Teil der eingestrahlichten Leistung als transmittierte Welle mit Wellenzahl  $k_b = k_e$  an der gegenüberliegenden Seite der Apparatur aus.

Ein modernes Experiment von Meixner et. al. [5] zur Beobachtung des Effekts ist im mittleren Bild von Abb. 2 skizziert. Die einfallende elektromagnetische Welle ist die Strahlung eines Argon-Lasers (Wellenlänge 514.5 nm in Luft). Das Material  $b$  ist Luft ( $n_b = 1.000$ ), das Prisma besteht aus einem Glas mit  $n_a = 1.520$ . Die Oberfläche

eines Schenkels des Prismas ist verspiegelt, so dass sich in diesem Prisma eine stehende Welle aufbaut. Der Abstand  $K$  von Knoten zu Knoten der stehenden Welle entlang der Hypotenuse ist

$$K = \frac{1}{2} \cdot \frac{514.5 \text{ nm}}{1.520 \cdot \sin 45^\circ} = 239.3 \text{ nm} . \quad (5)$$

Das zweite Prisma wird ersetzt durch einen Wellenleiter, dessen Spitze (effektive Apertur etwa 80 nm) im Abstand  $y$  von der Hypotenuse des Prismas entlang der  $x$ -Achse geführt wird. Die in den Detektor eingekoppelte optische Leistung als Funktion von  $x$  und  $y$  stellten Meixner et. al. [5] durch das Diagramm dar, das rechts in Abb. 2 wiedergegeben wird. Man erkennt deutlich den Knotenabstand von 239 nm der stehenden Welle in  $x$ -Richtung. Die beobachtete Abnahme der gemessenen Leistung  $I$  in  $y$ -Richtung konnten Meixner et. al. [5] näherungsweise durch

$$I = I_0 e^{-2y/\gamma} \quad \text{mit } \gamma = 207.8 \text{ nm} \pm 0.6 \text{ nm} \quad (6)$$

beschreiben.

Dringt die total ins Medium  $a$  reflektierte Welle auch dann ins Medium  $b$  ein und erzeugt dort ein evaneszentes Feld, wenn sich dort kein zweites Prisma und auch kein anderer Detektor befindet, der das evaneszente Feld nachweist? Die im zwanzigsten Jahrhundert erforschten Quantenphänomene haben uns gelehrt, dass diese Frage nicht trivial ist. Es gibt aber einen Effekt, nämlich die Goos-Hänchen-Verschiebung, der die Antwort „ja“ nahelegt:

Goos und Hänchen [6, 7] führten das Experiment in zahlreichen Varianten durch. Eine der Varianten wird in Abb. 3 auf der nächsten Seite skizziert: Ein Lichtbündel, dessen Querschnittsfläche eine Breite von  $B \approx 0.3 \text{ mm}$  hat, wird in ein Prisma eingekoppelt, und tritt nach etwa 60 bis 70 Totalreflektionen an der gegenüberliegenden Seite des Prismas wieder aus. Auf der Ober- und Unterseite des Prismas ist in der Mitte jeweils eine reflektierende Silberschicht

aufgebracht. Bei jeder Reflektion dringt das Strahlenbündel ein kleines Stück ins optisch dünnere Medium  $b$  ein, bevor es ins Medium  $a$  zurückkehrt. Nur dort, wo die Oberfläche des Prismas versilbert ist, wird das Strahlenbündel sofort reflektiert, ohne ins Medium  $b$  einzudringen. Dadurch wird der durch eine durchgehende Linie skizzierte Weg desjenigen Teils des Lichtbündels, der am Medium  $b$  reflektiert wird, bei jeder Reflektion ein Stück in  $x$ -Richtung versetzt gegenüber dem gepunktet skizzierten Weg desjenigen Teils des Lichtbündels, der am Silberstreifen reflektiert wird.

Der Effekt ist in der Skizze stark vergrößert dargestellt. Goos und Hänchen arbeiteten mit der grünen Linie einer Quecksilberlampe, und beobachteten bei sechzig bis siebzig Reflektionen einen Versatz von  $D = 50 \mu\text{m}$  bis  $D = 100 \mu\text{m}$ , also etwa ein Drittel der Breite  $B \approx 0.3 \text{ mm}$  des Strahlenbündels.  $D$  hängt sensitiv vom Einfallswinkel  $\vartheta_e$  ab und ist besonders groß wenn  $\vartheta_e$  nur wenig größer als  $\vartheta_{e,\text{kritisch}}$  ist.

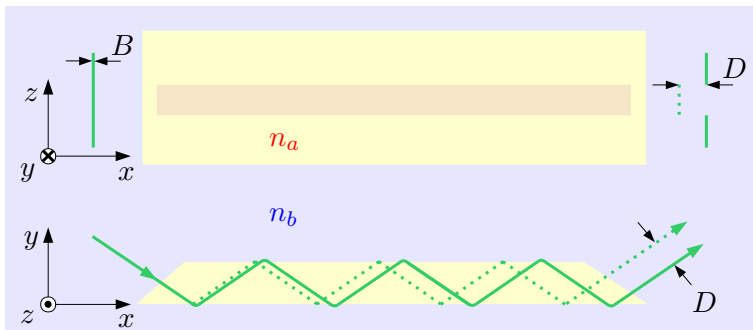


Abb. 3: Goos-Hänchen-Verschiebung

### 3. Brechungsgesetz und kritischer Winkel

Ausgangspunkt für alle theoretischen Überlegungen in diesem Artikel sind die Maxwell'schen Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \quad (7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (7c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7d)$$

und die Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} \quad \text{mit } \epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (7e)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M} = \mathbf{B}/\mu \quad \text{mit } \mu = \mu_r \mu_0 . \quad (7f)$$

Wir betonen dass

$$\mathbf{E} \in \mathbb{R}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}, \mathbf{H} \in \mathbb{R}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}, \mathbf{j} \in \mathbb{R}, \rho \in \mathbb{R}, \epsilon_0 \in \mathbb{R}, \mu_0 \in \mathbb{R} \quad (7g)$$

gilt, d. h. dass in Maxwell's Theorie alle Komponenten der dreidimensionalen Feldstärken stets reell sind.

Weil wir annehmen dass beide Medien isotrop sind, können die relativen Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_{r,a}$  und  $\epsilon_{r,b}$  sowie die relativen magnetischen Permeabilitäten  $\mu_{r,a}$  und  $\mu_{r,b}$  durch Zahlen dargestellt werden, und brauchen nicht durch Tensoren mit  $3 \times 3$  Komponenten beschrieben zu werden. Außerdem nehmen wir an, dass beide Medien, und auch die Grenzfläche zwischen ihnen, frei von makroskopischen Ladungen und Stromdichten sind:

$$\rho = 0 \quad , \quad \mathbf{j} = 0 \quad (7h)$$

Damit ist zugleich gesagt, dass beide Medien gute elektrische Isolatoren sind, in denen die elektromagnetischen Wellen keine makroskopischen Ströme induzieren.





Wir integrieren die beiden Maxwell-Gleichungen (7a) und (7b) über die in Abb. 4 auf der vorherigen Seite rot schraffierte Fläche  $A$  mit den Eckpunkten  $A_1, A_2, A_3, A_4$  und dem Normaleneinheitsvektor  $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_z$ :

$$\int_A d\mathbf{u}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) = \oint_A d\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{E}_{xy} = - \int_A d\mathbf{u}_z \cdot \dot{\mathbf{B}}_z \quad (10a)$$

$$\int_A d\mathbf{u}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \oint_A d\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{H}_{xy} = \int_A d\mathbf{u}_z \cdot \dot{\mathbf{D}}_z \quad (10b)$$

Hier wurden mit dem Satz von Stokes die Flächenintegrale über die Rotation in Linienintegrale über den Rand  $l_A$  der Fläche umgewandelt. Außerdem wurde berücksichtigt, dass wegen der Multiplikation mit den Differentialen  $d\mathbf{u}_z$  bzw.  $d\mathbf{l}_A$  nur bestimmte Komponenten der Vektoren zum Ergebnis beitragen.

Nun schrumpfen wir die Fläche  $A$  vertikal in der Weise, dass die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  nur infinitesimal unter der Grenzfläche im Medium  $a$  liegen, und die Punkte  $A_3$  und  $A_4$  nur infinitesimal über dieser Grenzfläche im Medium  $b$ . Dadurch gehen die Integrale über  $\dot{\mathbf{B}}$  und  $\dot{\mathbf{D}}$  gegen Null, weil die Fläche  $A$  infinitesimal klein wird. Die Linienintegrale von  $A_2$  nach  $A_3$  und von  $A_4$  nach  $A_1$  verschwinden ebenfalls. Die Strecken von  $A_1$  nach  $A_2$  und von  $A_3$  nach  $A_4$  wählen wir endlich, aber so klein dass sich die Felder auf dem Weg von  $A_1$  nach  $A_2$  bzw. von  $A_3$  nach  $A_4$  nicht merklich ändern. Damit erhält man folgende Integrale:

$$\begin{aligned} & \int_{A_1}^{A_2} d\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{E}_x + \int_{A_3}^{A_4} d\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{E}_x = 0 \approx \\ & \approx E_x(y = -0) \cdot \overline{A_2 A_1} - E_x(y = +0) \cdot \overline{A_3 A_4} \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\int_{A_1}^{A_2} d\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{H}_x + \int_{A_3}^{A_4} d\mathbf{l}_A \cdot \mathbf{H}_x = 0 \approx$$

$$\approx H_x(y = -0) \cdot \overline{A_2 A_1} - H_x(y = +0) \cdot \overline{A_3 A_4} \quad (11b)$$

Auf dem Weg von  $A_3$  nach  $A_4$  gibt es ein negatives Vorzeichen, weil er entgegen der  $x$ -Koordinate durchlaufen wird. Mit

$$\overline{A_2 A_1} = \overline{A_3 A_4} \quad (12)$$

folgt

$$E_{a,x} = E_{b,x} \quad , \quad H_{a,x} = H_{b,x} \quad , \quad (13a)$$

wobei  $\mathbf{E}_a$  bzw.  $\mathbf{H}_a$  die Felder im Material  $a$  bezeichnen, und  $\mathbf{E}_b$  bzw.  $\mathbf{H}_b$  die Felder im Material  $b$ .

Um zu zeigen, dass entsprechende Gleichungen auch für  $E_z$  und  $H_z$  gelten, wird die Fläche  $A$  von [Zeichnung 4](#) um  $\pi/2$  um die  $y$ -Achse gedreht, so dass die Flächennormale in  $x$ -Richtung orientiert ist. Anstelle von [\(11\)](#) erhält man dann die Gleichungen

$$-E_z(y = -0) \cdot \overline{A_2 A_1} + E_z(y = +0) \cdot \overline{A_3 A_4} = 0$$

$$-H_z(y = -0) \cdot \overline{A_2 A_1} + H_z(y = +0) \cdot \overline{A_3 A_4} = 0 \quad ,$$

weil jetzt die Wegintegrale im Medium  $b$  parallel zur  $z$ -Achse durchlaufen werden, im Medium  $a$  aber antiparallel zur  $z$ -Achse. Mit  $\overline{A_2 A_1} = \overline{A_3 A_4}$  folgt

$$E_{a,z} = E_{b,z} \quad , \quad H_{a,z} = H_{b,z} \quad . \quad (13b)$$

Die physikalische Aussage der Gleichungen [\(13a\)](#) und [\(13b\)](#) ist offensichtlich, dass die zur Grenzfläche tangentialen Komponenten der Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$  an der Grenzfläche stetig sind.

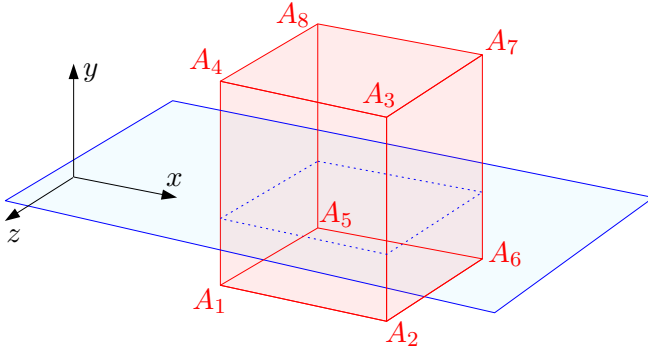


Abb. 5: Das Integrationsvolumen  $V$

Nun integrieren wir die Maxwell'schen Gleichungen (7c) und (7d) über das Volumen  $V$  des in Abbildung 5 skizzierten Kastens mit den Eckpunkten  $A_1$  bis  $A_8$ . Die Grenzfläche zwischen den Medien  $a$  und  $b$  ist in blauer Farbe angedeutet. Sie liegt zwischen den Flächen  $A_1, A_2, A_6, A_5$  und  $A_4, A_3, A_7, A_8$ . Wenn man die  $y$ -Komponenten des Volumens infinitesimal klein und dessen  $x$ - und  $z$ -Komponenten endlich, aber so klein wählt, dass sich die Felder auf den Integrationsflächen nicht merklich ändern, dann findet man mit (7h) und mithilfe des Gauß'schen Satzes

$$0 \stackrel{(7c)}{=} \int_V dV \nabla \cdot \mathbf{D} = \int_{O(V)} d\mathbf{f} \cdot \mathbf{D} = \overline{A_7 A_8} \cdot \overline{A_3 A_7} \cdot \left( D_{b,y}(y = +0) - D_{a,y}(y = -0) \right).$$

Demnach ist an der Grenzfläche

$$D_{a,y} = D_{b,y}. \quad (13c)$$

Mit der gleichen Methode leitet man aus (7d)

$$B_{a,y} = B_{b,y} \quad (13d)$$

her. Also sind die zur Grenzfläche tangentialen Komponenten von  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ , sowie die zur Grenzfläche senkrechten Komponenten von  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  an der Grenzfläche stetig.

Wir kennzeichnen die einlaufenden Felder im Medium  $a$  mit dem Index  $e$ , die reflektierten Felder im Medium  $a$  mit dem Index  $r$ , und die Felder im Medium  $b$  mit dem Index  $b$ . Außerdem definieren wir ein rechtshändiges System kartesischer Koordinaten  $x, y, z$  wie in Abbildung 1 auf Seite 2 dargestellt: Die Grenzfläche zwischen den Medien  $a$  und  $b$  liegt in der  $xz$ -Ebene ( $y = 0$ ), d. h. die positive  $y$ -Achse steht senkrecht auf der Grenzfläche und zeigt ins Medium  $b$ . Das Koordinatensystem wird so um die  $y$ -Achse gedreht, dass der Wellenvektor der einlaufenden Welle in der  $xy$ -Ebene liegt ( $k_{e,z} = 0$ ), und dass  $k_{e,x} \geq 0$  ist.

Weil wir annehmen, dass die Medien  $a$  und  $b$  beide isotrop sind, müssen dann aus Symmetriegründen auch die  $z$ -Komponenten der Wellenvektoren der reflektierten Felder und der Felder im Medium  $b$  gleich Null sein:  $k_{r,z} = k_{b,z} = 0$ . Denn eine Annahme  $k_{r,z} > 0$  wäre in isotropen Medien nicht besser oder schlechter begründet als die Annahme  $k_{r,z} < 0$ . Für  $k_{b,z}$  gilt entsprechendes:

$$k_{e,z} = k_{r,z} = k_{b,z} = 0 \quad (14)$$

In (19) werden wir den Begriff „ebene Welle“ formal definieren. Falls es sich bei den einfallenden Feldern um ebene Wellen handelt, dann können – wie wir im Folgenden sehen werden – alle Felder in beiden Medien vollständig durch solche Lösungen der Maxwell’schen Gleichungen beschrieben werden, die die Form

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E)} \quad (15a)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_B)} \quad (15b)$$

haben, auch im Fall überkritischer Einfallswinkel, vorausgesetzt dass man für die  $y$ -Komponente des Wellenvektors komplexe Werte

zulässt:

$$\mathbf{k} = \mathbf{u}_x k_x + \mathbf{u}_y k_y \quad \text{mit } k_x \in \mathbb{R}, k_y \in \mathbb{C}, k_z \stackrel{(14)}{=} 0 \quad (15c)$$

$t$  ist die Zeit,  $\mathbf{r}$  der Ort im dreidimensionalen Raum,  $\omega$  eine Frequenz,  $\varphi$  ein konstanter Phasenwinkel.

Die Felder müssen natürlich reell sein, siehe (7g). Die Gleichungen (15a) und (15b) sind deshalb zu interpretieren als

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[ \hat{\mathbf{E}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E)} \right] = \hat{\mathbf{E}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_E) \quad (16a)$$

$$\mathbf{B} = \text{Re} \left[ \hat{\mathbf{B}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_B)} \right] = \hat{\mathbf{B}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_B) . \quad (16b)$$

Nur aus Bequemlichkeit verzichten wir in den meisten unserer Formeln auf die explizite Notation  $\text{Re}[\dots]$ .

Im gesamten Rest dieses Artikels werden wir ausschließlich Felder betrachten, welche die Form (15) haben. Aussagen der Art „alle Felder haben diese oder jene Eigenschaft“ sind zu verstehen als „alle Felder mit der Form (15) haben diese oder jene Eigenschaft“.

Durch Einsetzen von (15) und der Nebenbedingung (7h) in die beiden Maxwell'schen Gleichungen (7a) und (7b) erhält man

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{u}_x \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{u}_y \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \\ &\quad + \mathbf{u}_z \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = i\mathbf{u}_x (k_y E_z - k_z E_y) + \\ &\quad + i\mathbf{u}_y (k_z E_x - k_x E_z) + i\mathbf{u}_z (k_x E_y - k_y E_x) = \\ &= i\mathbf{k} \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = +i\omega \mathbf{B} \end{aligned} \quad (17a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -i\omega \mathbf{D} . \quad (17b)$$

Die Wellenvektoren und Feldvektoren erfüllen also die Bedingungen

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \quad (18a)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mu \mathbf{D} = -\omega \epsilon \mu \mathbf{E} . \quad (18b)$$

Elektromagnetische Felder werden als „ebene Wellen“ bezeichnet, wenn sie die Form (15) haben und  $k_y$  reell ist:

$$\begin{aligned} \text{E. W.} &\equiv \text{Ebene Welle} \iff \\ &\iff \mathbf{k} \in \mathbb{R} \iff k_x \in \mathbb{R}, k_y \in \mathbb{R}, k_z \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (19)$$

Im Fall ebener Wellen muss nach (18)

$$\text{E. W. :} \quad \mathbf{k} \perp \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k} \quad (20)$$

gelten, wobei nach (18a) die drei Vektoren  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  ein rechtshändiges System bilden.

Wenn in einer ebenen Welle  $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = 0$  ist, dann muss nach (18a) auch  $\mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = 0$  sein. Also gilt für die Phasenfaktoren

$$\text{E. W. :} \quad \varphi_E = \varphi_B \quad \text{oder} \quad \varphi_E = \varphi_B + \pi . \quad (21)$$

Für die Beträge gilt im Fall einer ebenen Welle

$$\text{E. W. :} \quad E = \frac{\omega}{k} B = \frac{c}{n} B = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} B \quad (22)$$

mit dem

$$\text{Brechungsindex:} \quad n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (23)$$

und der

$$\text{Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} . \quad (24)$$

Wir betrachten ausschließlich „konventionelle“ Materialien mit den Eigenschaften

$$\epsilon_r > 0 \quad , \quad \mu_r > 0 \quad , \quad n > 0 \quad , \quad (25)$$

und ignorieren die seit 2001 bekannten „modifizierten“ Materialien mit negativem Brechungsindex.

Aus den Maxwell'schen Gleichungen (7a) und (7b) erhält man mit der Nebenbedingung (7h) durch Ableiten nach der Zeit und wechselseitiges Einsetzen die Wellengleichungen

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\epsilon\mu\ddot{\mathbf{E}} \quad (26a)$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = -\epsilon\mu\ddot{\mathbf{B}} . \quad (26b)$$

Weil die Gleichungen für das magnetische und das elektrische Feld formal identisch sind, betrachten wir nur das elektrische Feld. Für Felder der Form (15) folgt

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \\ &= -\mathbf{u}_x \left( k_y(k_x E_y - k_y E_x) - k_z(k_z E_x - k_x E_z) \right) - \\ &\quad - \mathbf{u}_y \left( k_z(k_y E_z - k_z E_y) - k_x(k_x E_y - k_y E_x) \right) - \\ &\quad - \mathbf{u}_z \left( k_x(k_z E_x - k_x E_z) - k_y(k_y E_z - k_z E_y) \right) = \\ &= -\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} = +\omega^2 \epsilon\mu \mathbf{E} . \end{aligned} \quad (27a)$$

Mit  $k_z \stackrel{(14)}{=} 0$  vereinfachen sich die Gleichungen beträchtlich:

$$-k_x k_y E_y + k_y^2 E_x = \omega^2 \epsilon\mu E_x \quad (28a)$$

$$k_x^2 E_y - k_x k_y E_x = \omega^2 \epsilon\mu E_y \quad (28b)$$

$$k_x^2 E_z + k_y^2 E_z = \omega^2 \epsilon\mu E_z \quad (28c)$$

Da stets  $\omega^2 \epsilon\mu \neq 0$  ist, folgt aus den beiden ersten Gleichungen

$$\text{falls } k_y = 0 : \quad E_x = 0 \text{ and } k_x^2 E_y = \omega^2 \epsilon\mu E_y$$

$$\text{falls } k_x = 0 : \quad E_y = 0 \text{ and } k_y^2 E_x = \omega^2 \epsilon\mu E_x$$



falls  $k_x \neq 0$  and  $k_y \neq 0$  :

$$\begin{aligned}(k_x^2 + k_y^2)E_y &= \omega^2 \epsilon \mu E_y \\ (k_x^2 + k_y^2)E_x &= \omega^2 \epsilon \mu E_x .\end{aligned}$$

In jedem Fall, auch für komplexe Wellenvektoren, gilt also die einfache Gleichung

$$\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \omega \sqrt{\epsilon \mu} . \quad (29)$$

Dies Resultat vergleichen wir mit der Gleichung

$$\text{E. W. : } k \stackrel{(22)}{=} \omega \sqrt{\epsilon \mu} , \quad (30)$$

die wir für den Betrag des reellen Wellenvektors einer ebenen Welle hergeleitet haben. Aus dem Vergleich ergibt sich die eigenartige

**Regel:** Wenn  $\mathbf{V}$  ein Vektor mit zwei reellen und einer imaginären Komponente ist, dann ist sein Betrag folgendermaßen zu berechnen:

$$V \equiv |\mathbf{V}| = \sqrt[+]{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} \neq \sqrt[+]{|V_x|^2 + |V_y|^2 + |V_z|^2} \quad (31)$$

Wir werden im Lauf unserer Untersuchung wiederholt Beispielen für diese Regel begegnen. Dennoch vermeiden wir es sie anzuwenden, weil wir keine offensichtliche mathematische und/oder physikalische Rechtfertigung kennen. Stattdessen werden wir diese Frage stets umgehen, so wie wir es bei der Herleitung von (29) getan haben, selbst wenn das zuweilen eine recht zähe Aufgabe ist.

Mit dem allgemeinen Ansatz (15) und einer beliebigen der Relationen (13) erhält man für jeden Punkt auf der Grenzfläche zwischen den beiden Medien die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}\hat{E}_{e,x} e^{i(k_{e,x}x - \omega_e t + \varphi_{e,E})} + \\ + \hat{E}_{r,x} e^{i(k_{r,x}x - \omega_r t + \varphi_{r,E})} \stackrel{(13a)}{=} \hat{E}_{b,x} e^{i(k_{b,x}x - \omega_b t + \varphi_{b,E})}\end{aligned} \quad (32)$$

Man beachte dass nur  $k_x x$  in den Exponenten auftaucht, weil auf der Grenzfläche  $y \stackrel{\text{Abb. 10}}{=} 0$  gilt, und  $k_z \stackrel{(14)}{=} 0$  überall gilt. Gleichung (32) muss zu jeder beliebigen Zeit  $t$  erfüllt sein. Das ist nur möglich mit

$$\omega \equiv \omega_e = \omega_r = \omega_b . \quad (33)$$

Die Frequenz der Strahlung ändert sich bei Reflektion und Brechung nicht.

Außerdem muss (32) an jedem Punkt  $x$  gelten. Das ist nur möglich mit

$$k_x \equiv k_{e,x} = k_{r,x} = k_{b,x} \quad , \quad k_x \stackrel{(15c)}{\in} \mathbb{R} . \quad (34)$$

In diesem Artikel betrachten wir ausschließlich den Fall, dass die einlaufenden Felder ebene Wellen sind. Dann ist gemäß (19)  $k_{e,y} \in \mathbb{R}$ , und  $k_{r,y}$  muss ebenfalls reel sein wegen

$$\sqrt{k_x^2 + k_{r,y}^2} \stackrel{(29)}{=} \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \stackrel{(29)}{=} \sqrt{k_x^2 + k_{e,y}^2} > \sqrt{k_x^2} , \quad (35)$$

was nach (19) bedeutet, dass die reflektierten Felder ebenfalls eine ebene Welle<sup>1</sup> bilden. Mit

$$k_r \stackrel{(35)}{=} k_e , \quad (36)$$

kann man aus Abb. 1 auf Seite 2 ablesen:

$$k_x = k_e \sin \vartheta_e = k_e \sin \vartheta_r \implies \vartheta_r = \vartheta_e \quad (37)$$

$$k_{r,y} = -k_e \cos \vartheta_e = -k_{e,y} \quad (38)$$

---

<sup>1</sup> Natürlich haben wir diese Tatsache nur unter der Voraussetzung „bewiesen“, dass die allgemeine Formel (15) tatsächlich eine korrekte Darstellung der reflektierten Felder ist.

Hinsichtlich des Feldes im Medium  $b$  kann man aus (29) schließen:

$$\sqrt{k_x^2 + k_{b,y}^2} = \omega \sqrt{\epsilon_b \mu_b} = \frac{\sqrt{\epsilon_b \mu_b}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} k_e \stackrel{(23)}{=} \frac{n_b}{n_a} k_e \quad (39)$$

Falls das Feld im Medium  $b$  eine ebene Welle ist, dann ist  $k_{b,y} \in \mathbb{R}$ , und es gilt

$$\text{E. W. : } k_b \stackrel{(39)}{=} \frac{n_b}{n_a} k_e, \quad (40)$$

und man kann aus Abb. 1 ablesen:

$$\begin{aligned} \text{p. w. : } k_x &\stackrel{(34)}{=} k_{b,x} = k_b \sin \vartheta_b \stackrel{(34)}{=} k_e \sin \vartheta_e \\ \implies n_b \sin \vartheta_b &\stackrel{(40)}{=} n_a \sin \vartheta_e \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} k_{b,y} = k_b \cos \vartheta_b &= \sqrt{k_b^2 - k_x^2} = \\ &\stackrel{(39),(34)}{=} k_e \sqrt{(n_b/n_a)^2 - \sin^2 \vartheta_e} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (42)$$

(41) ist das Brechungsgesetz von Snellius. Wir betonen, dass wir diese Relation durch Ablesen der Winkel aus Abb. 1 gefunden haben. Das war nur möglich, weil alle Wellenvektoren und ihre jeweiligen Winkel gegen die ( $y = 0$ )-Ebene, auch  $\mathbf{k}_b$  and  $\vartheta_b$ , als reell betrachtet wurden.

Auch die umgekehrte Schlussfolgerung gilt: Die ebenen Wellen (15) mit  $k_{b,y} \in \mathbb{R}$  sind nur dann eine korrekte Beschreibung der Felder im Medium  $b$ , wenn das Snellius'sche Brechungsgesetz (41) mit reellem  $\vartheta_b \in \mathbb{R}$  erfüllt ist, also nur dann, wenn

$$\sin \vartheta_e \leq \frac{n_b}{n_a} = \sin \vartheta_{e,\text{kritisch}} \quad (43)$$

ist.

Wenn  $k_{b,y}$  einen von Null verschiedenen Realteil *und* einen von Null verschiedenen Imaginärteil hätte, dann wären die Felder im Medium  $b$  gedämpfte ebene Wellen: Die Energie der Wellen, die ins Medium  $b$  eindringen, würde teilweise absorbiert und in Wärme umgewandelt. Dieser Fall interessiert uns hier nicht, wir nehmen weiterhin perfekte Transparenz beider Medien an.

Also untersuchen wir als dritte und letzte Möglichkeit ein rein imaginäres  $k_{b,y}$ . Wir definieren die

$$\text{Eindringtiefe} \equiv \gamma \equiv \frac{i}{k_{b,y}} \in \mathbb{R} , \quad (44)$$

und kombinieren sie mit der allgemein gültige Relation

$$-k_{b,y}^2 \stackrel{(29)}{=} k_x^2 - \omega^2 \epsilon_b \mu_b \stackrel{(37),(39)}{=} k_e^2 \sin^2 \vartheta_e - \frac{n_b^2}{n_a^2} k_e^2 = \gamma^{-2} . \quad (45)$$

Damit werden die Felder im Medium  $b$  zu

$$\mathbf{E}_b \stackrel{(15a)}{=} \hat{\mathbf{E}}_b e^{-y/\gamma + i(k_x x - \omega t + \varphi_{b,E})} \quad (46a)$$

$$\mathbf{B}_b \stackrel{(15b)}{=} \hat{\mathbf{B}}_b e^{-y/\gamma + i(k_x x - \omega t + \varphi_{b,B})} \quad (46b)$$

$$\gamma \stackrel{(45)}{=} \frac{1}{k_{e,+} \sqrt{\sin^2 \vartheta_e - (n_b/n_a)^2}} \stackrel{(43)}{=} \frac{1}{k_{e,+} \sqrt{\sin^2 \vartheta_e - \sin^2 \vartheta_{e,\text{kritisch}}}} > 0 . \quad (46c)$$

Wir schränken die Eindringtiefe auf die positive Wurzel ein, weil im Medium  $b$  stets  $y \geq 0$  ist, und deshalb nur ein positives  $\gamma > 0$  auf exponentiell gedämpfte Felder führt. Die negative Wurzel wird als „unphysikalisch“ gestrichen. Man beachte, dass bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  weder  $\gamma = 0$  noch  $\gamma = \infty$  eintreten kann.  $\gamma$  kann jedoch bei  $\vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  beliebig große endliche Werte annehmen.

Aus (46c) folgt  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$ . Während die Felder (15a) und (15b) mit reellem  $k_{b,y} \in \mathbb{R}$  nach (43) ausschließlich für Winkel

$\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  korrekte Beschreibungen der Felder im Medium  $b$  sind, ist die Lösung (46) ausschließlich für überkritische Winkel gültig.

Es wird sich im Folgenden als zweckmäßig erweisen, einen Winkel  $\vartheta_b$  so zu definieren, dass für beliebige Einfallswinkel  $\vartheta_e$ , auch für  $(n_a/n_b) \sin \vartheta_e > 1$ , formal das Brechungsgesetz

$$n_b \sin \vartheta_b \stackrel{(41)}{=} n_a \sin \vartheta_e \quad (47)$$

gilt. Bei  $(n_a/n_b) \sin \vartheta_e > 1$  muss  $\sin \vartheta_b > 1$  sein. Das ist nur möglich, wenn  $\vartheta_b \in \mathbb{C}$  komplex ist:

$$\begin{aligned} \vartheta_b &= \vartheta' + i\vartheta'' \quad \text{mit } \vartheta' \in \mathbb{R}, \vartheta'' \in \mathbb{R} \\ \frac{n_a}{n_b} \sin \vartheta_e &\stackrel{(47)}{=} \sin \vartheta_b = \frac{e^{i\vartheta'} e^{-\vartheta''} - e^{-i\vartheta'} e^{+\vartheta''}}{2i} = \\ &= \frac{(e^{-\vartheta''} - e^{+\vartheta''}) \cos \vartheta'}{2i} + \frac{(e^{-\vartheta''} + e^{+\vartheta''}) \sin \vartheta'}{2} \quad (48) \end{aligned}$$

Weil die linke Seite von (48) reell ist, muss die rechte Seite ebenfalls reell sein. Also muss der erste Term in der untersten Zeile verschwinden. Das erfordert  $\vartheta'' = 0$  und/oder  $\vartheta' = \pm\pi/2$ . Mit  $\vartheta'' = 0$  reduziert sich (48) auf  $\sin \vartheta_b = \sin \vartheta'$ . Dies ist die Lösung des Brechungsgesetzes für den Fall  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$ . Eine Lösung für überkritische Einfallswinkel gibt es dagegen nur mit  $\vartheta' = \pm\pi/2$ . Wir legen uns auf  $\vartheta' = +\pi/2$  fest:

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\frac{n_a}{n_b} \sin \vartheta_e = \sin \vartheta_b = + \frac{e^{-\vartheta''} + e^{+\vartheta''}}{2} = + \text{ch } \vartheta'' \quad (49)$$

Mit  $\vartheta' = -\pi/2$  könnte man die exotischen „modifizierten Materialien“ mit negativen Brechungsindizes behandeln. Wir werden

durchwegs  $\vartheta' = +\pi/2$  setzen, weil wir uns ausschließlich mit konventionellen Materialien befassen, für die  $n_a > 0$  und  $n_b > 0$  gilt.

Dagegen wird das Vorzeichen von  $\vartheta''$  wegen  $\text{ch}(+\vartheta'') = \text{ch}(-\vartheta'')$  durch (49) nicht festgelegt. Wir definieren also den folgenden komplexen Winkel:

$$\vartheta_b \equiv \vartheta' + i\vartheta'' \quad \text{mit } \vartheta' \in \mathbb{R}, \vartheta'' \in \mathbb{R}$$

$$\sin \vartheta_b \equiv \frac{n_a}{n_b} \sin \vartheta_e \tag{50a}$$

falls  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\vartheta_b \equiv \vartheta' \quad , \quad \vartheta'' = 0 \tag{50b}$$

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\vartheta_b \equiv +\pi/2 + i\vartheta'' \quad . \tag{50c}$$

Schließlich berechnen wir auch noch  $\cos \vartheta_b$ :

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_b &= \frac{e^{i\pi/2 - \vartheta''} + e^{-i\pi/2 + \vartheta''}}{2} = i \frac{e^{-\vartheta''} - e^{+\vartheta''}}{2} = \\ &= -i \text{sh } \vartheta'' = -i \sqrt{\text{ch}^2 \vartheta'' - 1} \stackrel{(49)}{=} \\ &= -i \sqrt{\sin^2 \vartheta_b - 1} \stackrel{(50a)}{=} -i \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \quad . \end{aligned} \tag{51}$$

Während  $\sin \vartheta_b$  reell ist, ist  $\cos \vartheta_b$  rein imaginär. Die bekannte Formel  $\sin^2 \vartheta_b + \cos^2 \vartheta_b = 1$  gilt auch für  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$ .

Wir betonen, dass  $\vartheta_b$  nur im Fall  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  (und demzufolge  $\vartheta_b \in \mathbb{R}$ ) anschaulich geometrisch interpretiert werden kann, wie in Abbildung 1 dargestellt. Im Fall  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  ist (50a) keine physikalische Aussage, sondern eine rein formale mathematische *Definition* des komplexen Winkels  $\vartheta_b$ .

Wenn man den  $\vartheta_b$  einschränkt auf

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\cos \vartheta_b \stackrel{(51)}{=} +i \sqrt{\sin^2 \vartheta_b - 1} = +i \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}, \quad (52)$$

dann kann man die Eindringtiefe des evaneszenten Feldes folgendermaßen schreiben:

für  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\begin{aligned} \gamma &\stackrel{(44)}{=} \frac{i}{k_{b,y}} \stackrel{(46c)}{=} \frac{1}{k_e(n_b/n_a) \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}} = \\ &\stackrel{(52)}{=} \frac{i}{k_e(n_b/n_a) \cos \vartheta_b} \end{aligned} \quad (53a)$$

$$\implies k_{b,y} = \frac{k_e n_b}{n_a} \cos \vartheta_b \quad (53b)$$

Wir kennen bereits

$$k_{b,x} \stackrel{(34)}{=} k_x \stackrel{(37)}{=} k_e \sin \vartheta_e \stackrel{(50a)}{=} \frac{k_e n_b}{n_a} \sin \vartheta_b. \quad (54)$$

Damit können die evaneszenten Felder (46) folgendermaßen geschrieben werden:

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\mathbf{E}_b \stackrel{(44)}{=} \hat{\mathbf{E}}_b e^{i(\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_{b,E})} \quad (55a)$$

$$\mathbf{B}_b \stackrel{(44)}{=} \hat{\mathbf{B}}_b e^{i(\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_{b,B})} \quad (55b)$$

$$\mathbf{k}_b = \mathbf{u}_x \left( \frac{k_e n_b}{n_a} \sin \vartheta_b \right) + \mathbf{u}_y \left( \frac{k_e n_b}{n_a} \cos \vartheta_b \right) \quad (55c)$$

In dieser Schreibweise wurden die Felder bereits in (15) angegeben.  $\mathbf{u}_x$  und  $\mathbf{u}_y$  sind Einheitsvektoren in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Weil  $\sin \vartheta_b$

reell und  $\cos \vartheta_b$  imaginär ist, hat der Wellenvektor  $\mathbf{k}_b$  eine reelle  $x$ -Komponente und eine imaginäre  $y$ -Komponente.

Wir vergleichen (55c) mit dem Wellenvektor  $\mathbf{k}_b$  bei unterkritischen Einfallswinkeln:

falls  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\mathbf{k}_b \stackrel{(41),(42)}{=} \mathbf{u}_x k_b \sin \vartheta_b + \mathbf{u}_y k_b \cos \vartheta_b \quad (56a)$$

$$k_b = |\mathbf{k}_b| \stackrel{(40)}{=} \frac{n_b}{n_a} k_e \stackrel{(41)}{=} \frac{\sin \vartheta_e}{\sin \vartheta_b} k_e \quad (56b)$$

Also sind die Wellenvektoren bei unter- und überkritischen Einfallswinkeln formal identisch, wenn der komplexe Winkel  $\vartheta_b = (50)$  eingesetzt wird, *und* wenn die seltsame Regel (31) angewandt wird, die besagt:

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_b| &\stackrel{(31)}{=} \sqrt{k_{b,x}^2 + k_{b,y}^2 + k_{b,z}^2} = k_e \frac{n_b}{n_a} \neq \\ &\neq \sqrt{|k_{b,x}|^2 + |k_{b,y}|^2 + |k_{b,z}|^2} = \\ &= \sqrt{2 (n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \end{aligned} \quad (57)$$

Wir betonen, dass (55) ohne irgend einen Rückgriff auf (31) hergeleitet wurde. Also hängt dieses Resultat nicht von der Zuverlässigkeit jener dubiosen Regel ab.

Die Formeln (46) für das evaneszente Feld werden geprüft durch das Experiment von Meixner et. al. [5], dessen Aufbau und Ergebnis wir in Abb. 2 auf Seite 5 skizziert haben. Nach (46) ist das evaneszente Feld in  $x$ -Richtung eine Welle mit der Wellenzahl  $k_x = k_e \sin \vartheta_e$ . Das wird durch die Messung bestätigt. Die exponentielle Dämpfung in  $y$ -Richtung wird bestimmt durch die



Eindringtiefe  $\gamma$ . Im Versuch von Meixner et. al. [5] wird der Wert

$$\gamma = \left( \frac{2\pi \cdot 1.520}{514.5 \text{ nm}} \sqrt{\sin^2 45^\circ - 1.520^{-2}} \right)^{-1} = 207.9 \text{ nm} \quad (58)$$

erwartet. In ausreichender Entfernung vom Prisma erreichten Meixner et. al. einen guten Fit ihrer Messergebnisse mit  $\gamma = 207.8 \text{ nm} \pm 0.6 \text{ nm}$ , was die Lösung (46) eindrucksvoll bestätigt. In Abschnitt 5 werden wir ihre Beobachtungen bei kleinem Abstand zwischen Prisma und Detektorspitze diskutieren.

#### 4. Fresnel-Koeffizienten und Phasenwinkel

Jedes elektromagnetische Feld kann als Summe „senkrecht polarisierter“ und „parallel polarisierter“ Felder dargestellt werden:

$$\mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{E}_\perp}_{\mathbf{E}_z} + \underbrace{\mathbf{E}_\parallel}_{\mathbf{E}_{xy}}, \quad \mathbf{B} = \underbrace{\mathbf{B}_\perp}_{\mathbf{B}_{xy}} + \underbrace{\mathbf{B}_\parallel}_{\mathbf{B}_z} \quad (59)$$

Senkrechte Polarisation bedeutet, dass das elektrische Feld senkrecht zu der Ebene polarisiert ist, die von den Wellenvektoren aufgespannt wird, also senkrecht zur  $xy$ -Ebene, siehe Abbildung 1 auf Seite 2. Ingenieure sprechen von einer TE-Welle, d. h. einer Welle mit transversalem elektrischen Feld. Bei senkrechter Polarisation ist nur  $E_z \neq 0$ , aber  $E_x = E_y = 0$ . Bei paralleler Polarisation ist  $E_z = 0$ , aber  $\mathbf{E}_{xy} \neq 0$ . Ingenieure sprechen von einer TM-Welle, d. h. von einer Welle mit transversalem magnetischen Feld. Im Fall ebener Wellen ( $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ ) bilden die Vektoren  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  wegen (18a) ein rechtshändiges orthogonales System. Darauf beruht die Einteilung (59) von  $\mathbf{B}$  in  $\mathbf{B}_\parallel$  und  $\mathbf{B}_\perp$ . Die Zeichen  $\perp$  und  $\parallel$  bezeichnen also immer die Polarisation des elektrischen, nicht des magnetischen Feldes relativ zur  $xy$ -Ebene.

In (13) haben wir festgestellt, dass an der Grenzfläche der Medien die zur Grenzfläche parallelen Komponenten der Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$

sowie die zur Grenzfläche senkrechten Komponenten der Felder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{B}$  stetig sind, und zwar unabhängig vom Einfallswinkel der Strahlung. Wir setzen in (13) die Felder (15) ein:

bei senkrechter Polarisation ( $\mathbf{E}_z = \mathbf{E}$ ) :

$$\hat{E}_{b,z}e^{i\varphi_{b,E}} = \hat{E}_{e,z}e^{i\varphi_{e,E}} + \hat{E}_{r,z}e^{i\varphi_{r,E}} \quad (60a)$$

$$\hat{B}_{b,x}e^{i\varphi_{b,B}} = \frac{\mu_b}{\mu_a} \left( \hat{B}_{e,x}e^{i\varphi_{e,B}} + \hat{B}_{r,x}e^{i\varphi_{r,B}} \right) \quad (60b)$$

$$\hat{B}_{b,y}e^{i\varphi_{b,B}} = \hat{B}_{e,y}e^{i\varphi_{e,B}} + \hat{B}_{r,y}e^{i\varphi_{r,B}} \quad (60c)$$

bei paralleler Polarisation ( $\mathbf{B}_z = \mathbf{B}$ ) :

$$\hat{E}_{b,x}e^{i\varphi_{b,E}} = \hat{E}_{e,x}e^{i\varphi_{e,E}} + \hat{E}_{r,x}e^{i\varphi_{r,E}} \quad (60d)$$

$$\hat{B}_{b,z}e^{i\varphi_{b,B}} = \frac{\mu_b}{\mu_a} \left( \hat{B}_{e,z}e^{i\varphi_{e,B}} + \hat{B}_{r,z}e^{i\varphi_{r,B}} \right) \quad (60e)$$

$$\hat{E}_{b,y}e^{i\varphi_{b,E}} = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} \left( \hat{E}_{e,y}e^{i\varphi_{e,E}} + \hat{E}_{r,y}e^{i\varphi_{r,E}} \right) \quad (60f)$$

Zwei triviale Gleichungen  $0 = 0$  wurden von vornherein gestrichen. Per Definition wählen wir die sechs Amplituden

$$\begin{aligned} 0 \leq \hat{E}_e \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq \hat{E}_r \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq \hat{E}_b \in \mathbb{R} \quad , \\ 0 \leq \hat{B}_e \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq \hat{B}_r \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 \leq \hat{B}_b \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (61)$$

stets reell und positiv. Um ihre Komponenten zu bestimmen, nutzen wir die Formeln

$$\mathbf{B} \stackrel{(18a)}{=} \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (62a)$$

$$\mathbf{E} \stackrel{(18b)}{=} -\frac{1}{\omega\epsilon\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{B} \quad , \quad (62b)$$

die für beliebige unter- und überkritische Einfallswinkel gültig sind, kürzen gemeinsame Faktoren, und nutzen  $k_z = 0$ :

$$\hat{B}_x e^{i\varphi_B} = +\frac{1}{\omega} k_y \hat{E}_z e^{i\varphi_E} \stackrel{(63f)}{=} -\frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} k_y (k_x \hat{B}_y - k_y \hat{B}_x) e^{i\varphi_B} \quad (63a)$$

$$\hat{B}_y e^{i\varphi_B} = -\frac{1}{\omega} k_x \hat{E}_z e^{i\varphi_E} \stackrel{(63f)}{=} +\frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} k_x (k_x \hat{B}_y - k_y \hat{B}_x) e^{i\varphi_B} \quad (63b)$$

$$\hat{B}_z e^{i\varphi_B} = +\frac{1}{\omega} (k_x \hat{E}_y - k_y \hat{E}_x) e^{i\varphi_E} \quad (63c)$$

$$\hat{E}_x e^{i\varphi_E} = -\frac{1}{\omega \epsilon \mu} k_y \hat{B}_z e^{i\varphi_B} \stackrel{(63c)}{=} -\frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} k_y (k_x \hat{E}_y - k_y \hat{E}_x) e^{i\varphi_E} \quad (63d)$$

$$\hat{E}_y e^{i\varphi_E} = +\frac{1}{\omega \epsilon \mu} k_x \hat{B}_z e^{i\varphi_B} \stackrel{(63c)}{=} +\frac{1}{\omega^2 \epsilon \mu} k_x (k_x \hat{E}_y - k_y \hat{E}_x) e^{i\varphi_E} \quad (63e)$$

$$\hat{E}_z e^{i\varphi_E} = -\frac{1}{\omega \epsilon \mu} (k_x \hat{B}_y - k_y \hat{B}_x) e^{i\varphi_B} \quad (63f)$$

Nur aus Bequemlichkeit haben wir auf die explizite Notation  $\text{Re}[\dots]$  für die Felder und ihre Komponenten verzichtet, siehe (16). Die Komponenten aller Wellenvektoren sind reell, ausgenommen  $k_{b,y}$  bei überkritischen Einfallswinkeln:

bei beliebigem  $\vartheta_e$  :

$$k_x \stackrel{(34)}{=} k_{e,x} = k_{r,x} \stackrel{(37)}{=} k_e \sin \vartheta_e \stackrel{(34)}{=} k_{b,x} \stackrel{(54)}{=} \frac{k_e n_b}{n_a} \sin \vartheta_b \quad (64a)$$

$$k_{e,y} \stackrel{(38)}{=} -k_{r,y} \stackrel{(38)}{=} k_e \cos \vartheta_e \quad (64b)$$

bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$k_{b,y} \stackrel{(40),(42)}{=} \frac{k_e n_b}{n_a} \cos \vartheta_b \quad , \quad \cos \vartheta_b \in \mathbb{R} \quad (64c)$$

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$k_{b,y} \stackrel{(44)}{=} \frac{i}{\gamma} \stackrel{(53b)}{=} \frac{k_e n_b}{n_a} \cos \vartheta_b \quad , \quad \gamma \in \mathbb{R} \quad , \quad i \cos \vartheta_b \in \mathbb{R} \quad (64d)$$

Also folgt aus (63)

bei beliebigem  $\vartheta_e$  :

$$\varphi_{e,B} = \varphi_{e,E} \quad \text{ODER} \quad \varphi_{e,B} = \varphi_{e,E} + \pi \quad (65a)$$

$$\varphi_{r,B} = \varphi_{r,E} \quad \text{ODER} \quad \varphi_{r,B} = \varphi_{r,E} + \pi \quad (65b)$$

bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi_{b,B} = \varphi_{b,E} \quad \text{ODER} \quad \varphi_{b,B} = \varphi_{b,E} + \pi \quad (65c)$$

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi_{b,B_x} = \varphi_{b,E_z} + \pi/2 \quad \text{ODER} \quad \varphi_{b,B_x} = \varphi_{b,E_z} - \pi/2 \quad (65d)$$

$$\varphi_{b,B_y} = \varphi_{b,E_z} \quad \text{ODER} \quad \varphi_{b,B_y} = \varphi_{b,E_z} + \pi \quad (65e)$$

$$\varphi_{b,E_x} = \varphi_{b,B_z} + \pi/2 \quad \text{ODER} \quad \varphi_{b,E_x} = \varphi_{b,B_z} - \pi/2 \quad (65f)$$

$$\varphi_{b,E_y} = \varphi_{b,B_z} \quad \text{ODER} \quad \varphi_{b,E_y} = \varphi_{b,B_z} + \pi . \quad (65g)$$

Dies Ergebnis erscheint zwar ziemlich kompliziert, ist aber sehr vernünftig: Der Energiefluss des evaneszenten Feldes wird beschrieben durch den Poynting-Vektor

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\mathbf{S}_b = \mathbf{E}_b \times \mathbf{B}_b / \mu_b \quad (66a)$$

$$\mu_b S_{b,x} = E_{b,y} B_{b,z} - E_{b,z} B_{b,y} \quad (66b)$$

$$\mu_b S_{b,y} = E_{b,z} B_{b,x} - E_{b,x} B_{b,z} \quad (66c)$$

$$\mu_b S_{b,z} = E_{b,x} B_{b,y} - E_{b,y} B_{b,x} = 0 . \quad (66d)$$

Bei senkrechter Polarisation ist  $E_x = E_y = B_z = 0$ , und bei paralleler Polarisation ist  $B_x = B_y = E_z = 0$ . Also ist bei beliebiger Polarisation  $S_{b,z} = 0$ . Aufgrund der Phasenbedingungen (65d) bis (65g) wechselt  $S_{b,y}$  bei jeder viertel Wellenlänge das Vorzeichen. Folglich gibt es während einer viertel Wellenlänge einen endlichen Energiefluss in positiver  $y$ -Richtung, und anschließend fließt die gleiche Energiemenge während einer viertel Wellenlänge in negativer  $y$ -Richtung. Der über eine halbe Wellenlänge gemittelte Energiefluss in  $y$ -Richtung ist deshalb Null. Dagegen gibt es keinen Vorzeichenwechsel in  $S_{b,x}$ . Folglich gibt es netto einen Energiefluss des evaneszenten Feldes in  $x$ -Richtung. Dies Ergebnis wird durch die

experimentell beobachtete Goos-Hänchen-Verschiebung bestätigt, die in Abschnitt 2 beschrieben wurde.

Die Änderung eines Phasenwinkels um  $\pi$  ist äquivalent zur Umkehrung der Richtung der Amplitude. Da wir die Richtungen der Amplituden noch nicht festgelegt haben, können wir die Alternativen (65) jetzt *per Definition* entscheiden. Wir wählen folgende Festlegungen:

bei beliebigem  $\vartheta_e$  :

$$\varphi_{e,B} = \varphi_{e,E} \quad (67a)$$

$$\varphi_{r,B} = \varphi_{r,E} + \pi \quad (67b)$$

bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi_{b,B} = \varphi_{b,E} \quad (67c)$$

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi_{b,B_x} = \varphi_{b,E_x} - \pi/2 \quad (67d)$$

$$\varphi_{b,B_y} = \varphi_{b,E_x} \quad (67e)$$

$$\varphi_{b,E_x} = \varphi_{b,B_z} - \pi/2 \quad (67f)$$

$$\varphi_{b,E_y} = \varphi_{b,B_z} \quad (67g)$$

Man beachte dass die Festlegungen (67e) und (67g) dadurch eindeutig bestimmt werden, dass  $S_{b,x}$  = (66b) bei beliebiger Polarisation positiv sein muss, um die Goos-Hänchen-Verschiebung korrekt zu beschreiben. Alle anderen Festlegungen wurden willkürlich gewählt. Wir müssen im Folgenden nur darauf achten, stets konsistent zu bleiben. Weil nur die Relativ-Werte der verschiedenen Phasenwinkel von Bedeutung sind, kann ein Phasenwinkel frei gewählt werden. Wir entscheiden uns für

$$\varphi_{e,E} = 0 . \quad (67h)$$

Außerdem definieren wir für alle Felder

$$\text{bei senkrechter Polarisation: } \hat{E}_z = \hat{E} \geq 0 \quad (67i)$$

$$\text{bei paralleler Polarisation: } \hat{B}_z = \hat{B} \geq 0, \quad (67j)$$

d. h. diese Amplituden sind in positiver  $z$ -Richtung orientiert.

Einsetzen von (64) und (67) in (63) ergibt

bei senkrechter Polarisation und beliebigem  $\vartheta_e$  :

$$\hat{B}_{e,x} = +\frac{1}{\omega} k_e \cos \vartheta_e \hat{E}_{e,z} \quad (68a)$$

$$\hat{B}_{e,y} = -\frac{1}{\omega} k_e \sin \vartheta_e \hat{E}_{e,z} \quad (68b)$$

$$\hat{B}_{r,x} = +\frac{1}{\omega} k_e \cos \vartheta_e \hat{E}_{r,z} \quad (68c)$$

$$\hat{B}_{r,y} = +\frac{1}{\omega} k_e \sin \vartheta_e \hat{E}_{r,z} \quad (68d)$$

bei senkrechter Polarisation und  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{B}_{b,x} = +\frac{1}{\omega} \frac{k_e n_b}{n_a} \cos \vartheta_b \hat{E}_{b,z} \quad (68e)$$

$$\hat{B}_{b,y} = -\frac{1}{\omega} \frac{k_e n_b}{n_a} \sin \vartheta_b \hat{E}_{b,z} \quad (68f)$$

bei senkrechter Polarisation und  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{B}_{b,x} = +\frac{1}{\omega} \frac{i}{\gamma} \hat{E}_{b,z} e^{i\pi/2} = +\frac{1}{\omega} \frac{k_e n_b}{n_a} i \cos \vartheta_b \hat{E}_{b,z} \quad (68g)$$

$$\hat{B}_{b,y} = -\frac{1}{\omega} \frac{k_e n_b}{n_a} \sin \vartheta_b \hat{E}_{b,z} \quad (68h)$$

bei paralleler Polarisation und beliebigem  $\vartheta_e$  :

$$\hat{E}_{e,x} = -\frac{1}{\omega \epsilon_a \mu_a} k_e \cos \vartheta_e \hat{B}_{e,z} \quad (68i)$$

$$\hat{E}_{e,y} = +\frac{1}{\omega \epsilon_a \mu_a} k_e \sin \vartheta_e \hat{B}_{e,z} \quad (68j)$$

$$\hat{E}_{r,x} = -\frac{1}{\omega \epsilon_a \mu_a} k_e \cos \vartheta_e \hat{B}_{r,z} \quad (68k)$$

$$\hat{E}_{r,y} = -\frac{1}{\omega\epsilon_a\mu_a} k_e \sin \vartheta_e \hat{B}_{r,z} \quad (68l)$$

bei paralleler Polarisation und  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{E}_{b,x} = -\frac{1}{\omega\epsilon_b\mu_b} \frac{k_e n_b}{n_a} \cos \vartheta_b \hat{B}_{b,z} \quad (68m)$$

$$\hat{E}_{b,y} = +\frac{1}{\omega\epsilon_b\mu_b} \frac{k_e n_b}{n_a} \sin \vartheta_b \hat{B}_{b,z} \quad (68n)$$

bei paralleler Polarisation und  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{E}_{b,x} = -\frac{1}{\omega\epsilon_b\mu_b} \frac{i}{\gamma} \hat{B}_{b,z} e^{i\pi/2} = -\frac{1}{\omega\epsilon_b\mu_b} \frac{k_e n_b}{n_a} i \cos \vartheta_b \hat{B}_{b,z} \quad (68o)$$

$$\hat{E}_{b,y} = +\frac{1}{\omega\epsilon_b\mu_b} \frac{k_e n_b}{n_a} \sin \vartheta_b \hat{B}_{b,z} \quad (68p)$$

Wir wissen bereits, dass für ebene Wellen die Relation

$$\text{E. W. : } E \stackrel{(22)}{=} \frac{\omega}{k} B = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} B = \frac{k}{\omega\epsilon\mu} B \quad (69a)$$

gilt. Mit Hinblick auf (68) ist es offenbar sinnvoll, die Amplituden des evaneszenten Feldes folgendermaßen zu *definieren*:

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{E}_b \equiv \frac{k_e n_b}{n_a \omega \epsilon \mu} \hat{B}_b \quad , \quad \hat{B}_b \equiv \frac{k_e n_b}{n_a \omega} \hat{E}_b \quad (69b)$$

Außerdem definieren wir

$$\widetilde{\cos} \vartheta_b \equiv \begin{cases} \cos \vartheta_b & \text{falls } \vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}} \\ i \cos \vartheta_b & \text{falls } \vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}} \end{cases} \quad , \quad \widetilde{\cos} \vartheta_b \in \mathbb{R} . \quad (70)$$

Durch Einsetzen von (69) und (70) in (68) erhält man für beliebiges  $\vartheta_e$

bei senkrechter Polarisation :

$$\hat{B}_{e,x} = +\hat{B}_e \cos \vartheta_e \quad \hat{B}_{e,y} = -\hat{B}_e \sin \vartheta_e \quad (71a)$$

$$\hat{B}_{r,x} = +\hat{B}_r \cos \vartheta_e \quad \hat{B}_{r,y} = +\hat{B}_r \sin \vartheta_e \quad (71b)$$

$$\hat{B}_{b,x} = +\hat{B}_b \widetilde{\cos} \vartheta_b \quad \hat{B}_{b,y} = -\hat{B}_b \sin \vartheta_b \quad (71c)$$

bei paralleler Polarisation :

$$\hat{E}_{e,x} = -\hat{E}_e \cos \vartheta_e \quad \hat{E}_{e,y} = +\hat{E}_e \sin \vartheta_e \quad (71d)$$

$$\hat{E}_{r,x} = -\hat{E}_r \cos \vartheta_e \quad \hat{E}_{r,y} = -\hat{E}_r \sin \vartheta_e \quad (71e)$$

$$\hat{E}_{b,x} = -\hat{E}_b \widetilde{\cos} \vartheta_b \quad \hat{E}_{b,y} = +\hat{E}_b \sin \vartheta_b . \quad (71f)$$

Man beachte, dass alle Komponenten aller Amplituden reell sind.

Jetzt haben wir alle erforderlichen Werkzeuge in der Hand, um die Relationen (60) vollständig nutzen zu können. Wir eliminieren die magnetischen Felder mithilfe von (63), setzen  $\varphi_{e,E} \stackrel{(67h)}{=} 0$  ein, setzen die Wellenvektor-Komponenten (64) ein, und setzen die Amplitudenkomponenten (71) ein. Mithilfe von

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1$$

$$\sin \vartheta_e = \frac{n_b}{n_a} \sin \vartheta_b$$

$$\text{bei } \vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}} : \quad \varphi_{b,B_z} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_y} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_x} + \pi/2 \quad (72)$$

erhält man

bei senkrechter Polarisation ( $\mathbf{E}_z = \mathbf{E}$ ) :

bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{E}_{b,z} e^{i\varphi_{b,E}} = \hat{E}_{e,z} + \hat{E}_{r,z} e^{i\varphi_{r,E}} \quad (73a)$$

$$\cos \vartheta_b \hat{E}_{b,z} e^{i\varphi_{b,E}} = \frac{n_a}{n_b} \frac{\mu_b}{\mu_a} \cos \vartheta_e \left( \hat{E}_{e,z} - \hat{E}_{r,z} e^{i\varphi_{r,E}} \right) \quad (73b)$$

$$\hat{E}_{b,z} e^{i\varphi_{b,E}} = \hat{E}_{e,z} + \hat{E}_{r,z} e^{i\varphi_{r,E}} \quad (73c)$$

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{E}_{b,z} e^{i\varphi_{b,Ez}} = \hat{E}_{e,z} + \hat{E}_{r,z} e^{i\varphi_{r,E}} \quad (73d)$$



$$\cos \vartheta_b \hat{E}_{b,z} e^{i\varphi_b, Ez} = \frac{n_a}{n_b} \frac{\mu_b}{\mu_a} \cos \vartheta_e \left( \hat{E}_{e,z} - \hat{E}_{r,z} e^{i\varphi_r, E} \right) \quad (73e)$$

$$\hat{E}_{b,z} e^{i\varphi_b, Ez} = \hat{E}_{e,z} + \hat{E}_{r,z} e^{i\varphi_r, E} \quad (73f)$$

bei paralleler Polarisation ( $\mathbf{B}_z = \mathbf{B}$ ) :

bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{E}_b \cos \vartheta_b e^{i\varphi_b, E} = \cos \vartheta_e \left( \hat{E}_e + \hat{E}_r e^{i\varphi_r, E} \right) \quad (73g)$$

$$\hat{E}_b e^{i\varphi_b, E} = \frac{n_a}{n_b} \frac{\mu_b}{\mu_a} \left( \hat{E}_e - \hat{E}_r e^{i\varphi_r, E} \right) \quad (73h)$$

$$\hat{E}_b e^{i\varphi_b, E} = \frac{n_b}{n_a} \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} \left( \hat{E}_e - \hat{E}_r e^{i\varphi_r, E} \right) \quad (73i)$$

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\hat{E}_b \widetilde{\cos} \vartheta_b e^{i\varphi_b, Ex} = \cos \vartheta_e \left( \hat{E}_e + \hat{E}_r e^{i\varphi_r, E} \right) \quad (73j)$$

$$\hat{E}_b e^{i(\varphi_b, Ex + \pi/2)} = \frac{n_a}{n_b} \frac{\mu_b}{\mu_a} \left( \hat{E}_e - \hat{E}_r e^{i\varphi_r, E} \right) \quad (73k)$$

$$\hat{E}_b e^{i\varphi_b, Ey} = \frac{n_b}{n_a} \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} \left( \hat{E}_e - \hat{E}_r e^{i\varphi_r, E} \right) \quad (73l)$$

Die Gleichungen für unter- und überkritisches  $\vartheta_e$  sind formal identisch wegen (72) und wegen

$$\text{bei senkrechter Polarisation } (\mathbf{E}_z = \mathbf{E}) : \varphi_{b,E} \equiv \varphi_{b,E_z} \quad (74a)$$

$$\text{bei paralleler Polarisation } (\mathbf{B}_z = \mathbf{B}) : \varphi_{b,B} \equiv \varphi_{b,B_z} . \quad (74b)$$

Außerdem sind Gleichungen (73a) und (73c) identisch. Und (73h) und (73i) sind identisch wegen

$$\frac{n_a}{n_b} \frac{\mu_b}{\mu_a} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{\epsilon_b \mu_b}} \frac{\mu_b}{\mu_a} = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} \frac{\sqrt{\epsilon_b \mu_b}}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \frac{n_b}{n_a} \frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} . \quad (75)$$

Also haben wir für jede Polarisation zwei linear unabhängige Gleichungen, die bei beliebigem  $\vartheta_e$  gelten:

bei senkrechter Polarisation ( $\mathbf{E}_z = \mathbf{E}$ ) :

$$\hat{E}_b e^{i\varphi_{b,E}} = \hat{E}_e + \hat{E}_r e^{i\varphi_{r,E}} \quad (76a)$$

$$\cos \vartheta_b \hat{E}_b e^{i\varphi_{b,E}} = \frac{n_a}{n_b} \frac{\mu_b}{\mu_a} \cos \vartheta_e \left( \hat{E}_e - \hat{E}_r e^{i\varphi_{r,E}} \right) \quad (76b)$$

bei paralleler Polarisation ( $\mathbf{B}_z = \mathbf{B}$ ) :

$$\hat{E}_b \cos \vartheta_b e^{i\varphi_{b,E}} = \cos \vartheta_e \left( \hat{E}_e + \hat{E}_r e^{i\varphi_{r,E}} \right) \quad (76c)$$

$$\hat{E}_b e^{i\varphi_{b,E}} = \frac{n_a}{n_b} \frac{\mu_b}{\mu_a} \left( \hat{E}_e - \hat{E}_r e^{i\varphi_{r,E}} \right) \quad (76d)$$

Es wird sich herausstellen, dass bei unterschiedlicher Polarisation auch die Phasenwinkel  $\varphi$  der Felder unterschiedlich sind. Weil in (76) nur die Phasenwinkel der elektrischen Felder auftauchen, vereinbaren wir für sie eine besonders einfache Notation:

$$\varphi_{\perp} \equiv \varphi_{r,E} \text{ bei senkrechter Polarisation} \quad (77a)$$

$$\varphi_{\parallel} \equiv \varphi_{r,E} \text{ bei paralleler Polarisation} \quad (77b)$$

$$\varphi_{b\perp} \equiv \varphi_{b,E} \text{ bei senkrechter Polarisation} \quad (77c)$$

$$\varphi_{b\parallel} \equiv \varphi_{b,E} \text{ bei paralleler Polarisation} \quad (77d)$$

Wir erinnern daran, dass nach (72) und (73)

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi_{b\perp} \equiv \varphi_{b,E} = \varphi_{b,E_z} \quad (77e)$$

$$\varphi_{b\parallel} \equiv \varphi_{b,E} = \varphi_{b,E_y} = \varphi_{b,E_x} + \pi/2 \quad (77f)$$

ist. Damit berechnet man aus (76) diese Fresnel-Koeffizienten:

bei senkrechter Polarisation:

$$\tau_{\perp} \equiv \frac{\hat{E}_b e^{i\varphi_{b\perp}}}{\hat{E}_e} = \frac{2n_a \mu_b \cos \vartheta_e}{n_a \mu_b \cos \vartheta_e + n_b \mu_a \cos \vartheta_b} \quad (78a)$$

$$\rho_{\perp} \equiv \frac{\hat{E}_r e^{i\varphi_{\perp}}}{\hat{E}_e} = \frac{n_a \mu_b \cos \vartheta_e - n_b \mu_a \cos \vartheta_b}{n_a \mu_b \cos \vartheta_e + n_b \mu_a \cos \vartheta_b} \quad (78b)$$

bei paralleler Polarisation:

$$\tau_{\parallel} \equiv \frac{\hat{E}_b e^{i\varphi_{b\parallel}}}{\hat{E}_e} = \frac{2n_a \mu_b \cos \vartheta_e}{n_b \mu_a \cos \vartheta_e + n_a \mu_b \cos \vartheta_b} \quad (78c)$$

$$\rho_{\parallel} \equiv \frac{\hat{E}_r e^{i\varphi_{\parallel}}}{\hat{E}_e} = \frac{-n_b \mu_a \cos \vartheta_e + n_a \mu_b \cos \vartheta_b}{n_b \mu_a \cos \vartheta_e + n_a \mu_b \cos \vartheta_b} \quad (78d)$$

Wir können jetzt alle Phasenwinkel für den Fall  $\mathbf{k}_b \in \mathbb{R}$  bestimmen, bei dem alle Felder ebene Wellen sind. Das ist bei  $n_b > n_a$  immer der Fall, bei  $n_a > n_b$  jedoch nur für Einfallswinkel  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$ . Auf den rechten Seiten der Gleichungen (78) sind bei unterkritischen Einfallswinkeln alle Faktoren reell. Die Amplituden sind nach (61) ebenfalls reell und  $\geq 0$ . Also können die Phasenwinkel nur 0 oder  $\pi$  sein. Wegen  $\tau_{\perp} \geq 0$  und  $\tau_{\parallel} \geq 0$  muss  $\varphi_{b\perp} = 0$  und  $\varphi_{b\parallel} = 0$  sein. Dagegen können  $\varphi_{\perp}$  und  $\varphi_{\parallel}$  Null oder  $\pi$  sein, je nachdem welcher der beiden Summanden in den Zählern von  $\rho_{\perp}$  und  $\rho_{\parallel}$  größer ist. Damit können wir die Liste (67) der Phasenwinkel ergänzen:

bei beliebigem  $\vartheta_e$  :

$$\varphi_{e,E} \stackrel{(67h)}{=} 0 \stackrel{(67)}{=} \varphi_{e,B} \quad (79a)$$

bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi \stackrel{(77)}{=} \varphi_{r,E} = (0 \text{ ODER } \pi) \quad , \quad \varphi_{r,B} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{r,E} + \pi \quad (79b)$$

$$\varphi_b \stackrel{(77)}{=} \varphi_{b,E} = 0 \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,B} \quad (79c)$$

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi \stackrel{(77)}{=} \varphi_{r,E} = \varphi_{r,B} - \pi \quad (79d)$$

$$\varphi_{b,B_x} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_z} - \pi/2 \quad (79e)$$

$$\varphi_{b,B_y} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_z} \quad (79f)$$

$$\varphi_{b,E_x} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,B_z} - \pi/2 \quad (79g)$$

$$\varphi_{b,E_y} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,B_z} \quad (79h)$$

Nach (62a) müssen in ebenen Wellen ( $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ ) die drei Vektoren  $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$  bzw. nach Kürzen gemeinsamer Phasenfaktoren die drei

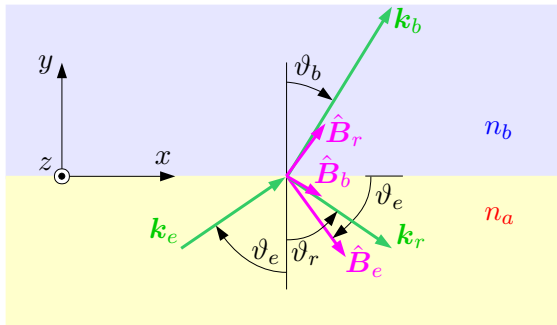


Abb. 6: Senkrechte Polarisation,  $\varphi_{r,E} = \pi$ ,  $\varphi_{r,B} = 0$

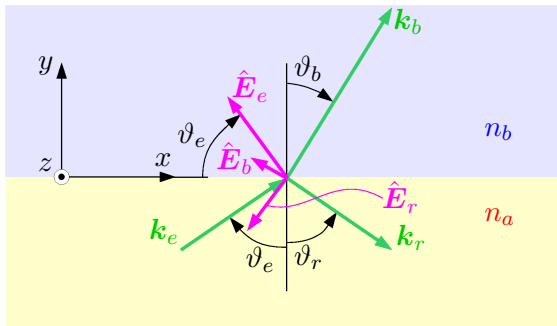


Abb. 7: Parallele Polarisation,  $\varphi_{r,E} = 0$ ,  $\varphi_{r,B} = \pi$

Vektoren  $\mathbf{k}$ ,  $\hat{\mathbf{E}}e^{i\varphi_E}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}e^{i\varphi_B}$  ein rechtshändiges orthogonales System bilden. Wir überprüfen das mithilfe der Zeichnungen Abb. 6 und Abb. 7, in denen die Gleichungen (71) graphisch dargestellt sind.

$\hat{\mathbf{E}}_{e,z}$  in Abb. 6 und  $\hat{\mathbf{B}}_{e,z}$  in Abb. 7 sind nach (67i) positiv, weisen also aus der Zeichenebene nach oben heraus. Die drei Vektoren  $\mathbf{k}_e$ ,  $\hat{\mathbf{E}}_e$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_e$  bilden in beiden Zeichnungen rechtshändige Systeme.

Die drei Vektoren  $\mathbf{k}_b$ ,  $\hat{\mathbf{E}}_b$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_b$  bilden ebenfalls in beiden Zeichnungen rechtshändige Systeme, in Übereinstimmung mit unseren

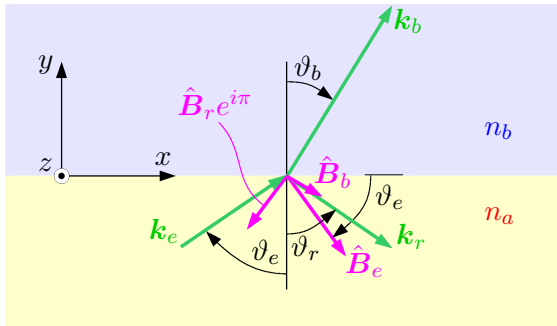


Abb. 8: Senkrechte Polarisation,  $\varphi_{r,E} = 0$ ,  $\varphi_{r,B} = \pi$

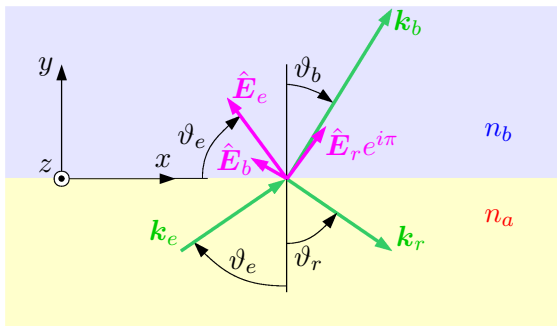


Abb. 9: Parallele Polarisation,  $\varphi_{r,E} = \pi$ ,  $\varphi_{r,B} = 0$

Festlegungen  $\varphi_b = \varphi_{b,E} = 0$  und  $\varphi_{b,B} = 0$  im Fall  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$ .

Das Dreibein  $\mathbf{k}_r, \hat{\mathbf{E}}_r, \hat{\mathbf{B}}_r$  ist in beiden Abbildungen linkshändig. Also muss entweder ( $\varphi_{r,E} = \pi$  UND  $\varphi_{r,B} = 0$ ) oder ( $\varphi_{r,E} = 0$  UND  $\varphi_{r,B} = \pi$ ) sein, damit das Dreibein  $\mathbf{k}_r, \mathbf{E}_r, \mathbf{B}_r$  rechtshändig ist. Die erste Möglichkeit ist in den Abbildungen 6 und 9 dargestellt, die zweite Möglichkeit in den Abbildungen 7 und 8. Erneut werden unsere Zuweisungen in (79) bestätigt.

Wir betrachten die unterschiedlichen Phasenwinkel  $\varphi_{r,E} \equiv \varphi_{\perp}$  bzw.  $\varphi_{r,E} \equiv \varphi_{\parallel}$  bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  genauer:

Für senkrecht polarisierte Strahlung und  $\mathbf{k}_b \in \mathbb{R}$

muss im Fall  $n_b\mu_a \cos \vartheta_b < n_a\mu_b \cos \vartheta_e$  der Phasenwinkel  $\varphi_{\perp} = 0$  sein. Das bedeutet, dass das Feld  $\mathbf{B}$  bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$  macht, das Feld  $\mathbf{E}$  jedoch nicht. (80a)

muss im Fall  $n_b\mu_a \cos \vartheta_b > n_a\mu_b \cos \vartheta_e$  der Phasenwinkel  $\varphi_{\perp} = \pi$  sein. Das bedeutet, dass das Feld  $\mathbf{E}$  bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$  macht, das Feld  $\mathbf{B}$  jedoch nicht. (80b)

gibt es im Fall  $n_b\mu_a \cos \vartheta_b = n_a\mu_b \cos \vartheta_e$  trivialerweise keinen Phasensprung, weil es kein reflektiertes Feld gibt:  $\rho_{\perp} = 0$  und  $\tau_{\perp} = 1$ . Der Winkel  $\vartheta_{e,\text{Brewster}} = \arccos[(n_b\mu_a/n_a\mu_b) \cos \vartheta_b]$  wird als Brewster-Winkel bezeichnet. (80c)

Für parallel polarisierte Strahlung und  $\mathbf{k}_b \in \mathbb{R}$

muss im Fall  $n_b\mu_a \cos \vartheta_e < n_a\mu_b \cos \vartheta_b$  der Phasenwinkel  $\varphi_{\parallel} = 0$  sein. Das bedeutet, dass das Feld  $\mathbf{B}$  bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$  macht, das Feld  $\mathbf{E}$  jedoch nicht. (81a)

muss im Fall  $n_b \mu_a \cos \vartheta_e > n_a \mu_b \cos \vartheta_b$  der Phasenwinkel  $\varphi_{\parallel} = \pi$  sein. Das bedeutet, dass das Feld  $\mathbf{E}$  bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$  macht, das Feld  $\mathbf{B}$  jedoch nicht. (81b)

gibt es im Fall  $n_b \mu_a \cos \vartheta_e = n_a \mu_b \cos \vartheta_b$  trivialerweise keinen Phasensprung, weil es kein reflektiertes Feld gibt:  $\rho_{\parallel} = 0$  und  $\tau_{\parallel} = 1$ . Der Winkel  $\vartheta_{e,\text{Brewster}} = \arccos[(n_a \mu_b / n_b \mu_a) \cos \vartheta_b]$  wird als Brewster-Winkel bezeichnet. (81c)

Die Bedingung (80c) des Brewster-Winkels bei senkrechter Polarisation kann in der Form

$$\frac{n_b \cos \vartheta_b}{n_a \cos \vartheta_e} = \frac{\mu_b}{\mu_a} \quad (82a)$$

geschrieben werden. Wenn  $n_b > n_a$  ist, dann geht  $\cos \vartheta_e$  bei steigendem  $\vartheta_e$  schneller gegen Null als  $\cos \vartheta_b$ , so dass (82a) genau dann eine Lösung hat, wenn  $n_b/n_a < \mu_b/\mu_a$  ist. Wenn dagegen  $n_b < n_a$  ist, dann geht  $\cos \vartheta_b$  bei steigendem  $\vartheta_e$  schneller gegen Null als  $\cos \vartheta_e$ , so dass (82a) genau dann eine Lösung hat, wenn  $n_b/n_a > \mu_b/\mu_a$  ist. Insgesamt gilt also bei senkrechter Polarisation folgende Bedingung:

$$\exists \text{ Brewster-Winkel}_{\perp} \iff \begin{cases} n_b > n_a \text{ UND } n_b/n_a < \mu_b/\mu_a \\ n_b < n_a \text{ UND } n_b/n_a > \mu_b/\mu_a \end{cases} \quad (82b)$$

Das Zeichen  $\exists$  bedeutet „es gibt“.

Die Bedingung (81c) des Brewster-Winkels bei paralleler Polarisation kann in der Form

$$\frac{n_b \cos \vartheta_e}{n_a \cos \vartheta_b} = \frac{\mu_b}{\mu_a} \quad (82c)$$

geschrieben werden. Mit den gleichen Überlegungen wie bei senkrechter Polarisation findet man die folgende Bedingung für das Auftreten eines Brewster-Winkels bei paralleler Polarisation:

$$\exists \text{ Brewster-Winkel}_{\parallel} \iff \begin{cases} n_b > n_a \text{ UND } n_b/n_a > \mu_b/\mu_a \\ n_b < n_a \text{ UND } n_b/n_a < \mu_b/\mu_a \end{cases} \quad (82d)$$

Die Bedingungen (82b) und (82d) schließen sich wechselseitig aus, d. h. es gibt bei einer Materialkombination mit vorgegebenen Quotienten  $n_b/n_a$  und  $\mu_b/\mu_a$  entweder *nur* bei senkrechter oder *nur* bei paralleler Polarisation einen Brewster-Winkel. Weil beim häufig auftretenden Fall  $\mu_b = \mu_a$  die Bedingung (82d) erfüllt wird, tritt ein Brewster-Winkel meistens bei paralleler Polarisation auf, aber nur mit exotischen<sup>2</sup> Materialkombinationen bei senkrechter Polarisation.

Die Energiedichte einer ebenen elektromagnetischen Welle ist

$$\frac{1}{2} \left( \epsilon |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2 / \mu \right) \stackrel{(22)}{=} \epsilon |\mathbf{E}|^2. \quad (83)$$

Der Reflektionskoeffizient  $R$  und der Transmissionskoeffizient  $T$  werden definiert durch

$$R = \frac{\text{reflektierte Leistung}}{\text{einlaufende Leistung}} = \frac{|\mathbf{E}_r|^2}{|\mathbf{E}_e|^2} \quad (84a)$$

$$T = \frac{\text{transmitierte Leistung}}{\text{einlaufende Leistung}} = \frac{\epsilon_b |\mathbf{E}_b|^2 \cdot w_b \cdot c/n_b}{\epsilon_a |\mathbf{E}_e|^2 \cdot w_e \cdot c/n_a}. \quad (84b)$$

Die Definition von  $w_b/w_e = \cos \vartheta_b / \cos \vartheta_e$  geht aus Abb. 10 hervor. Für das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien gilt

$$\frac{c/n_b}{c/n_a} \stackrel{(18)}{=} \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}{\sqrt{\epsilon_b \mu_b}}. \quad (85)$$

<sup>2</sup> Ich weiß nicht, ob es solche Materialkombinationen wirklich gibt. Hinweise willkommen. <mailto:gerold.gruendler@astrophys-neunhof.de>



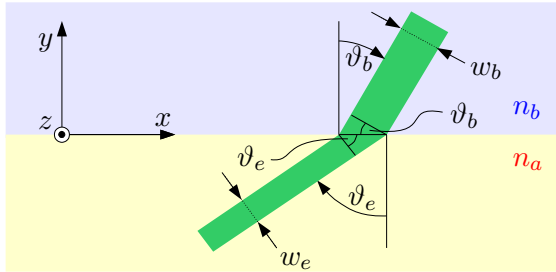


Abb.10: Der Quotient  $w_b/w_e$

Mit  $|\mathbf{E}_r|^2/|\mathbf{E}_e|^2 = |\rho|^2$  und  $|\mathbf{E}_b|^2/|\mathbf{E}_e|^2 = |\tau|^2$  gilt dann

$$\text{falls } \mathbf{k}_b \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\perp} = |\rho_{\perp}|^2 \quad (86a) \\ T_{\perp} = |\tau_{\perp}|^2 \frac{n_b}{n_a} \frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{\cos \vartheta_b}{\cos \vartheta_e} \quad (86b) \\ R_{\parallel} = |\rho_{\parallel}|^2 \quad (86c) \\ T_{\parallel} = |\tau_{\parallel}|^2 \frac{n_b}{n_a} \frac{\mu_a}{\mu_b} \frac{\cos \vartheta_b}{\cos \vartheta_e} . \quad (86d) \end{array} \right.$$

Bei den Reflektionskoeffizienten kürzen sich alle Faktoren außer  $|\rho|^2$  heraus.

$n = 1.5$ ,  $\mu_r = 1$  sind typische Parameter für Gläser, die in optischen Instrumenten verwendet werden. Für Luft gilt in guter Näherung  $n = \mu_r = 1$ . Die Fresnelkoeffizienten als Funktion des Einfallswinkels  $\vartheta_e$  für diese Materialpaarung sind in zwei Diagrammen auf der nächsten Seite dargestellt. Die entsprechenden Diagramme der Reflektions- und Transmissionskoeffizienten findet man auf Seite 43. Der kritische Winkel liegt im Fall  $n_a/n_b = 1.5$  bei  $\vartheta_{e,\text{kritisch}} = 0.23 \pi$ . Die Einträge für überkritische Winkel werden wir später begründen, zunächst betrachten wir weiterhin den Fall  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$ , d. h.  $\mathbf{k}_b \in \mathbb{R}$ .

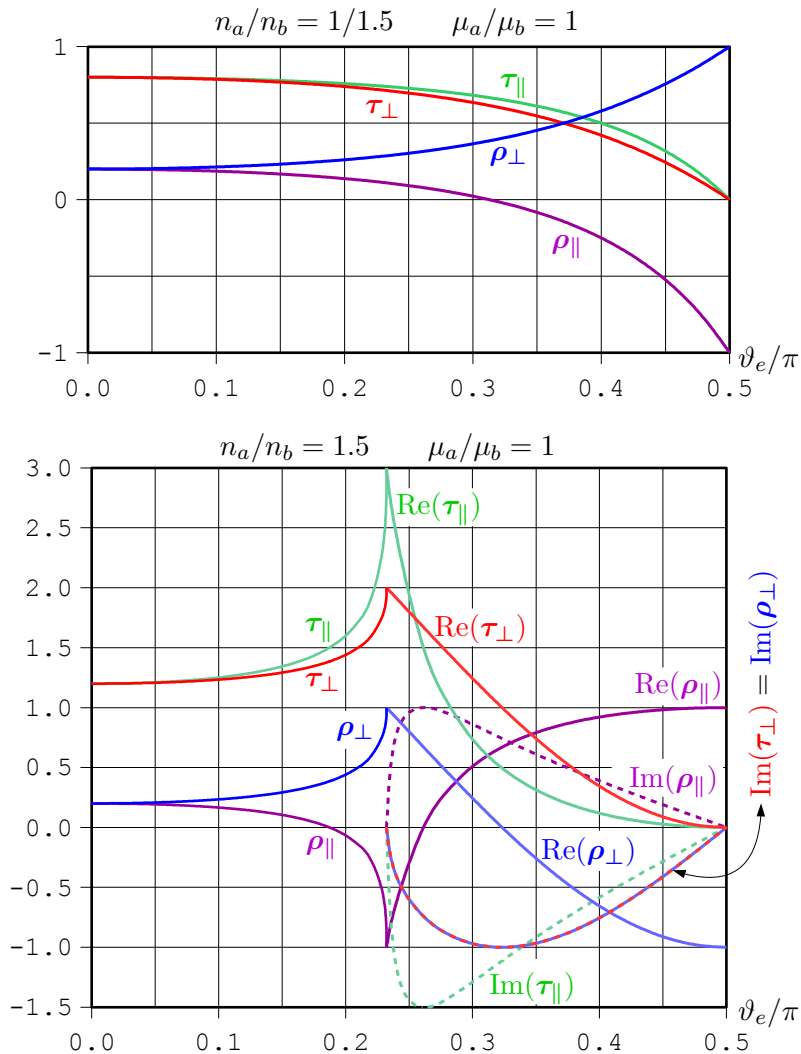


Abb. 11 : Fresnel-Koeffizienten

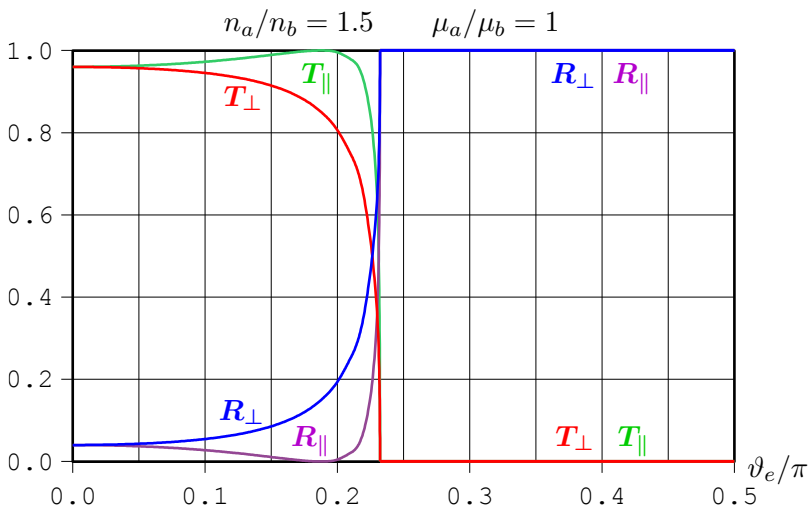
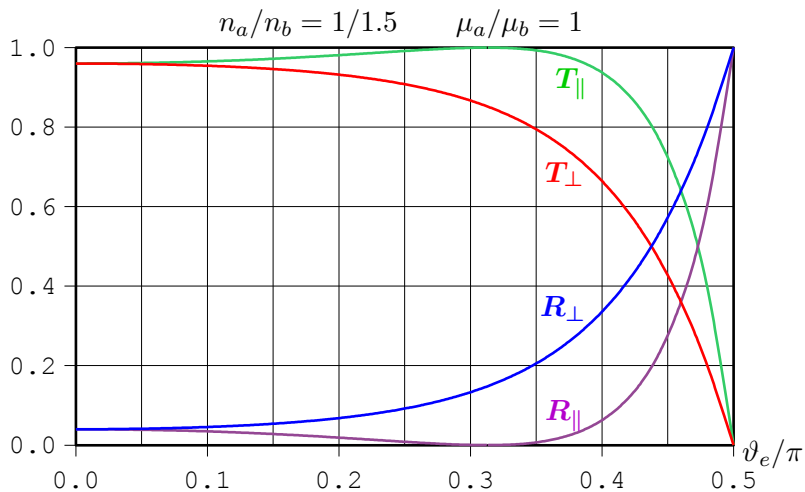


Abb. 12: Reflektions- und Transmissionskoeffizienten

Wenn Strahlung unter den Brewster-Winkeln  $0.31\pi = 56^\circ$  (bei Brechung aus  $a = \text{Luft}$  in  $b = \text{Glas}$ ) bzw.  $0.19\pi = 34^\circ$  (bei Brechung aus  $a = \text{Glas}$  in  $b = \text{Luft}$ ) einfällt, dann ist  $\rho_{\parallel} = 0$ ,  $R_{\parallel} = 0$ , und  $T_{\parallel} = 1$ . Das bedeutet, dass die unter diesen Winkeln reflektierte Strahlung vollständig senkrecht zur Einfallsebene (und damit parallel zur Grenzfläche) polarisiert ist.

Aus (80) folgt: Wenn senkrecht polarisierte Strahlung, aus Luft kommend, an der Glasoberfläche gebrochen wird, dann macht das elektrische Feld der Welle bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$ . Wenn senkrecht polarisierte Strahlung, aus Glas kommend, an der Grenzfläche zur Luft gebrochen wird, dann macht das magnetische Feld der Welle bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$ .

Aus (81) folgt: Wenn parallel polarisierte Strahlung, aus Luft kommend, an der Glasoberfläche unter einem Winkel  $\vartheta_e < \vartheta_{\text{Brewster}}$  gebrochen wird, dann macht das elektrische Feld der Welle bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$ . Ist der Einfallswinkel dagegen  $\vartheta_e > \vartheta_{\text{Brewster}}$ , dann macht das magnetische Feld der Welle bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$ . Wird parallel polarisierte Strahlung, aus Glas kommend, an der Grenzfläche zur Luft gebrochen, dann ist es im Fall  $\vartheta_e < \vartheta_{\text{Brewster}}$  das magnetische Feld, im Fall  $\vartheta_e > \vartheta_{\text{Brewster}}$  aber das elektrische Feld der Welle, das bei der Reflektion einen Phasensprung von  $\pi$  macht.

Eine graphische Darstellung der Phasenwinkel für  $n_a/n_b = 1/1.5$  bzw.  $n_a/n_b = 1.5$  mit  $\mu_a = \mu_b$  findet man auf Seite 49. Die Einträge bei überkritischen Einfallswinkeln ( $\vartheta_{e,\text{kritisch}} = 0.23\pi$  im Fall  $n_a/n_b = 1.5$ ) werden wir im Folgenden begründen.

Zur Diskussion der Fresnel-Koeffizienten bei überkritischen Einfallswinkeln setzen wir

$$\cos \vartheta_b \stackrel{(52)}{=} i_+ \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \quad (87)$$

in (78) ein. Das ergibt

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\tau_{\perp} \equiv \frac{\hat{E}_b e^{i\varphi_{b\perp}}}{\hat{E}_e} = \frac{2n_a \mu_b \cos \vartheta_e}{n_a \mu_b \cos \vartheta_e + i n_b \mu_a + \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}} \quad (88a)$$

$$\rho_{\perp} \equiv \frac{\hat{E}_r e^{i\varphi_{\perp}}}{\hat{E}_e} = \frac{n_a \mu_b \cos \vartheta_e - i n_b \mu_a + \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_a \mu_b \cos \vartheta_e + i n_b \mu_a + \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}} \quad (88b)$$

$$\tau_{\parallel} \equiv \frac{\hat{E}_b e^{i\varphi_{b\parallel}}}{\hat{E}_e} = \frac{2n_a \mu_b \cos \vartheta_e}{n_b \mu_a \cos \vartheta_e + i n_a \mu_b + \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}} \quad (88c)$$

$$\rho_{\parallel} \equiv \frac{\hat{E}_r e^{i\varphi_{\parallel}}}{\hat{E}_e} = \frac{-n_b \mu_a \cos \vartheta_e + i n_a \mu_b + \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_b \mu_a \cos \vartheta_e + i n_a \mu_b + \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}} \quad (88d)$$

Man erkennt unmittelbar

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$R_{\perp} = |\rho_{\perp}|^2 = 1 \quad , \quad R_{\parallel} = |\rho_{\parallel}|^2 = 1 . \quad (89)$$

Das stimmt überein mit der Erfahrung, dass die einfallende Strahlung bei überkritischen Einfallswinkeln zu 100 % reflektiert wird.

Die Berechnung der Transmissionskoeffizienten kann im Fall  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  nicht mithilfe der Fresnel-Koeffizienten  $\tau$  erfolgen, weil der in (84b) verwendete Parameter  $w_b$  nicht definiert ist. An die Stelle von (84) treten

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$R = \frac{\text{reflektierte Leistung}}{\text{einlaufende Leistung}} = \frac{|\mathbf{E}_r|^2}{|\mathbf{E}_e|^2} \stackrel{(86)}{=} |\rho|^2 \stackrel{(89)}{=} 1 \quad (90a)$$

$$T = \frac{\text{transmitierte Leistung}}{\text{einlaufende Leistung}} = 1 - R = 0 . \quad (90b)$$

Als „transmitierte Leistung“ wird hier offensichtlich die Leistung verstanden, die fern (streng genommen in unendlicher Entfernung) von der Grenzfläche gemessen werden kann. Denn dicht an der Grenzfläche existiert ja im Medium  $b$  das messbare evaneszente Feld. Oder man interpretiert „transmitierte Leistung“ als den zeitlichen Mittelwert der vom Medium  $a$  ins Medium  $b$  übertragenen Leistung. Dieser Mittelwert ist Null, da ja die gesamte einlaufende Leistung letztlich mit der reflektierten Welle ins Medium  $a$  zurück fließt. Der zeitliche Versatz zwischen dem Transport der Energie in der einlaufenden Welle zur Grenzfläche, und dem Abtransport der Energie in der reflektierten Welle, wird – wie wir gleich sehen werden – daran erkennbar, dass die Phasenwinkel  $\varphi_{\perp}$  und  $\varphi_{\parallel}$  im Fall  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  von  $\pi$  und von Null verschieden sind.

Für die Materialparameter  $n_a/n_b = 1.5$  und  $\mu_a = \mu_b$  sind die Koeffizienten (90) im unteren Diagramm von Abb. 12 auf Seite 43 eingetragen.

Wir zerlegen die Fresnel-Koeffizienten (88) in ihre Real- und Imaginärteile:

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\tau_{\perp} = \frac{2n_a\mu_b \cos \vartheta_e (n_a\mu_b \cos \vartheta_e - in_b\mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1})}{n_a^2\mu_b^2 \cos^2 \vartheta_e + n_b^2\mu_a^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1]} \quad (91a)$$

$$\rho_{\perp} = \frac{1}{n_a^2 \mu_b^2 \cos^2 \vartheta_e + n_b^2 \mu_a^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1]} \cdot \left( n_a^2 \mu_b^2 \cos^2 \vartheta_e - n_b^2 \mu_a^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1] - i 2 n_a \mu_b \cos \vartheta_e n_b \mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \right) \quad (91b)$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2 n_a \mu_b \cos \vartheta_e (n_b \mu_a \cos \vartheta_e - i n_a \mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1})}{n_b^2 \mu_a^2 \cos^2 \vartheta_e + n_a^2 \mu_b^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1]} \quad (91c)$$

$$\rho_{\parallel} = \frac{1}{n_b^2 \mu_a^2 \cos^2 \vartheta_e + n_a^2 \mu_b^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1]} \cdot \left( - n_b^2 \mu_a^2 \cos^2 \vartheta_e + n_a^2 \mu_b^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1] + i 2 n_b \mu_a \cos \vartheta_e n_a \mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \right) \quad (91d)$$

Für die Materialkombination  $n_a/n_b = 1.5$  mit  $\mu_a = \mu_b$  sind die Real- und Imaginärteile dieser Koeffizienten im unteren Diagramm von Abb. 11 auf Seite 42 eingetragen.

Aus der Kombination von (91) mit

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$|\rho|^2 \stackrel{(88)}{=} 1 \quad \stackrel{(88)}{\implies} \quad \hat{E}_r = \hat{E}_e \quad \stackrel{(88)}{\implies} \quad \rho = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (92)$$

kann man schlussfolgern: Bei  $\vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  ist  $(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1 \gtrsim 0$ . Dann ist  $\cos \varphi_{\perp} \lesssim 1$ ,  $\sin \varphi_{\perp} \lesssim 0$ ,  $\cos \varphi_{\parallel} \gtrsim -1$ , und  $\sin \varphi_{\parallel} \gtrsim 0$ . Also ist  $\varphi_{\perp} \lesssim 0$  und  $\varphi_{\parallel} \lesssim \pi$ .

Bei  $\vartheta_e \lesssim \pi/2$  ist  $\cos \vartheta_e \gtrsim 0$  und  $(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1 > 0$ . Dann ist  $\cos \varphi_{\perp} \gtrsim -1$ ,  $\sin \varphi_{\perp} \lesssim 0$ ,  $\cos \varphi_{\parallel} \lesssim 1$ , und  $\sin \varphi_{\parallel} \gtrsim 0$ . Also ist  $\varphi_{\perp} \gtrsim \pi$  und  $\varphi_{\parallel} \gtrsim 0$ .

Nachdem klargestellt ist, in welchen Quadranten die Phasenwinkel jeweils liegen, können wir sie mithilfe der mehrdeutigen Arkustangens-Funktion übersichtlich darstellen.

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi_{\perp} = \arctan \left( \frac{-2n_a\mu_b \cos \vartheta_e n_b \mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_a^2 \mu_b^2 \cos^2 \vartheta_e - n_b^2 \mu_a^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1]} \right) \quad (93a)$$

$$\lesssim 0 \text{ bei } \vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}} \quad , \quad \gtrsim \pi \text{ bei } \vartheta_e \lesssim \pi/2$$

$$\varphi_{\parallel} = \arctan \left( \frac{-2n_b\mu_a \cos \vartheta_e n_a \mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_b^2 \mu_a^2 \cos^2 \vartheta_e - n_a^2 \mu_b^2 [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1]} \right) \quad (93b)$$

$$\lesssim \pi \text{ bei } \vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}} \quad , \quad \gtrsim 0 \text{ bei } \vartheta_e \lesssim \pi/2$$

Für die Materialpaarung  $n_a/n_b = 1/1.5$  und  $n_a/n_b = 1.5$  mit  $\mu_a = \mu_b$  sind die Phasenverschiebungen  $\varphi_{\perp}$  und  $\varphi_{\parallel}$  in Abb. 13 auf der nächsten Seite dargestellt. Dort sind auch die Phasenwinkel für  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  dargestellt, die wir in (80) und (81) festgestellt haben. Beim Brewster-Winkel von  $0.31\pi$  springt  $\varphi_{\parallel}$  von  $\pi$  auf Null bzw. beim Brewster-Winkel von  $0.19\pi$  von Null auf  $\pi$ . Und beim kritischen Winkel von  $0.23\pi$  (den es natürlich nur im Fall  $n_a > n_b$  gibt) ändern sich sowohl  $\varphi_{\perp}$  als auch  $\varphi_{\parallel}$  unstetig, aber kontinuierlich (die Kurven haben einen Knick, machen aber keinen Sprung).

Zuweilen findet man in der Literatur die Phasenwinkel mit umgekehrtem Vorzeichen. Es ist zwar  $+\pi = -\pi$  modulo  $2\pi$ . Aber bei  $0 < |\varphi| < \pi$  ist das Vorzeichen nicht beliebig, sondern als messbare Größe eindeutig festgelegt. Der Unterschied beruht darauf, dass viele Autoren  $\varphi$  als den Phasenwinkel definieren, um den das reflektierte oder das gebrochene Feld dem einfallenden Feld voraus läuft. Nach unserer Definition (15) ist  $\varphi$  jedoch der Phasenwinkel, um den das reflektierte oder das gebrochene Feld dem einfallenden Feld nachläuft.

Die Differenz  $\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp}$  ist bei  $\vartheta_{e,\text{kritisch}}$  gleich  $\pi$ , sinkt dann bis zu einem Minimum von  $0.7487\pi$  bei  $\vartheta_e = 0.287\pi = 51.7^\circ$ , und steigt dann wieder bis auf  $\pi$  bei  $\vartheta_e = \pi/2$ . Also gibt es zwei Winkel,



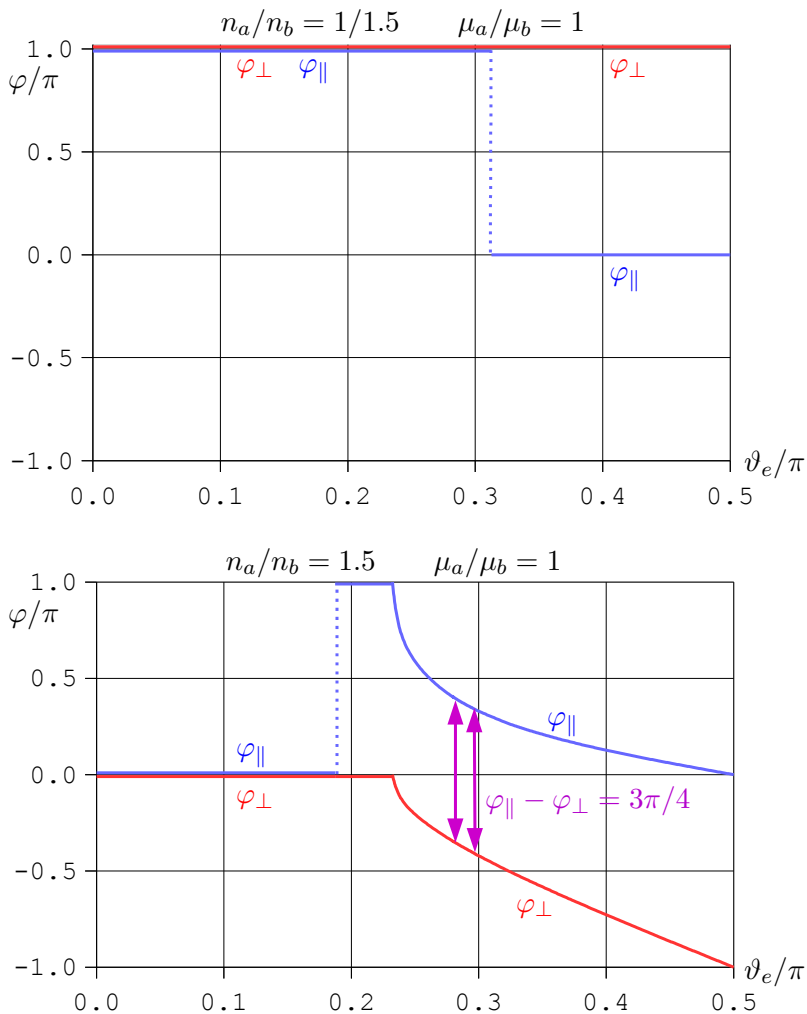


Abb. 13: Die Phasenverschiebungen  $\varphi_{\perp}$  und  $\varphi_{\parallel}$

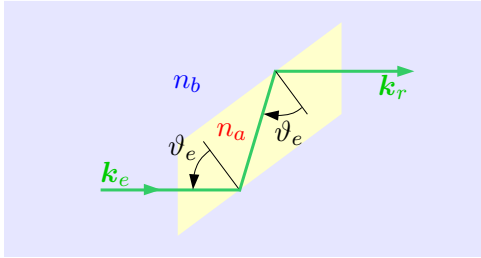


Abb. 14: Ein Fresnel-Rhombus

nämlich  $\vartheta_e = 0.279 \pi = 50.2^\circ$  und  $\vartheta_e = 0.296 \pi = 53.3^\circ$ , bei denen die Differenz  $\varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp}$  genau  $0.75 \pi$  beträgt. Diese beiden Winkel sind in Abb. 13 durch violette Pfeile markiert. In Abbildung 14 ist ein Fresnel-Rhombus für die Parameter  $n_a/n_b = 1.5$ ,  $\mu_a = \mu_b$ ,  $\vartheta_e = 53.3^\circ$  gezeichnet. Wenn das einfallende Feld eine linear polarisierte ebene Welle mit  $\hat{E}_{\perp} = \hat{E}_{\parallel}$  ist, dann eilt nach den zwei totalen Reflexionen die Phase von  $\hat{E}_{\parallel}$  der Phase von  $\hat{E}_{\perp}$  um  $3\pi/2 = -\pi/2$  modulo  $2\pi$  nach. Aus der linear polarisierten Welle ist also eine zirkular polarisierte Welle geworden. Wenn man hinter den ersten einen zweiten Fresnel-Rhombus schaltet, dann erhält man wieder eine linear polarisierte Welle, deren Polarisations ebene gegenüber dem einfallenden Feld um  $90^\circ$  gedreht ist. Die unzählige male überprüfte Funktionsfähigkeit von Fresnel-Rhomben ist ein deutliches experimentelles Indiz für die Korrektheit der reflektiven Fresnel-Koeffizienten (88) und der daraus erschlossenen reflektiven Phasenverschiebungen (93).

Offensichtlich ist  $|\tau_{\perp}|^2 = |(88a)|^2 \neq 1$  und  $|\tau_{\parallel}|^2 = |(88c)|^2 \neq 1$ . Deshalb muss man bei der Auswertung dieser Koeffizienten anders vorgehen als bei den reflektiven Fresnel-Koeffizienten. Wir berechnen die Quotienten  $\hat{E}_b/\hat{E}_e$  der Amplituden:

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\frac{\hat{E}_b}{\hat{E}_e} \stackrel{(88a)}{=} \tau_{\perp} e^{-i\varphi_{b\perp}} \stackrel{(91a)}{=} \frac{2n_a\mu_b \cos \vartheta_e}{n_a^2\mu_b^2 \cos^2 \vartheta_e + n_a^2\mu_a^2 \sin^2 \vartheta_e - n_b^2\mu_a^2} \cdot \left( n_a\mu_b \cos \vartheta_e \cos \varphi_{b\perp} - i \left[ n_a\mu_b \cos \vartheta_e \sin \varphi_{b\perp} + n_b\mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \cos \varphi_{b\perp} \right] - n_b\mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \sin \varphi_{b\perp} \right) \quad (94a)$$

$$\frac{\hat{E}_b}{\hat{E}_e} \stackrel{(88c)}{=} \tau_{\parallel} e^{-i\varphi_{b\parallel}} \stackrel{(91c)}{=} \frac{2n_a\mu_b \cos \vartheta_e}{n_b^2\mu_a^2 \cos^2 \vartheta_e + n_a^2\mu_b^2 (n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - n_a^2\mu_b^2} \cdot \left( n_b\mu_a \cos \vartheta_e \cos \varphi_{b\parallel} - i \left[ n_b\mu_a \cos \vartheta_e \sin \varphi_{b\parallel} + n_a\mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \cos \varphi_{b\parallel} \right] - n_a\mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \sin \varphi_{b\parallel} \right) \quad (94b)$$

Die Quotienten der reellen Amplituden müssen reell sein. Also müssen die eckigen Klammern verschwinden:

$$\sin \varphi_{b\perp} = - \frac{n_b\mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_a\mu_b \cos \vartheta_e} \cos \varphi_{b\perp} \quad (95a)$$

$$\sin \varphi_{b\parallel} = - \frac{n_a\mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_b\mu_a \cos \vartheta_e} \cos \varphi_{b\parallel} \quad (95b)$$

Einsetzen in (94) ergibt

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\tau_{\perp} e^{-i\varphi_{b\perp}} = \frac{\hat{E}_b}{\hat{E}_e} = 2 \cos \varphi_{b\perp} \quad (96a)$$

$$\tau_{\parallel} e^{-i\varphi_{b\parallel}} = \frac{\hat{E}_b}{\hat{E}_e} = \frac{n_a\mu_b}{n_b\mu_a} \cdot 2 \cos \varphi_{b\parallel} \quad (96b)$$

Mit  $\hat{E}_b$  und  $\varphi_{b\perp}$  bzw.  $\varphi_{b\parallel}$  enthält jede Gleichung zwei Unbekannte. Wir wissen aber, dass der Quotient der Beträge der Amplituden positiv sein muss.  $\varphi_{b\perp}$  und  $\varphi_{b\parallel}$  müssen also im ersten oder im vierten Quadranten liegen, und sie müssen gleich

$$\varphi_{b\perp} \stackrel{(95)}{=} \arctan \left( - \frac{n_b \mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_a \mu_b \cos \vartheta_e} \right) \quad (97a)$$

$$\varphi_{b\parallel} \stackrel{(95)}{=} \arctan \left( - \frac{n_a \mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_b \mu_a \cos \vartheta_e} \right) \quad (97b)$$

sein. Damit lassen sich die Phasenwinkel für vorgegebene Werte von  $n_a, n_b, \mu_a, \mu_b, \vartheta_e$  eindeutig berechnen. Für die Beispielwerte  $n_a/n_b = 1.5$  und  $\mu_a = \mu_b$  sind die Phasenwinkel in Abb. 15 gezeichnet, zusammen mit den Phasenwinkeln bei unterkritischen Einfallswinkeln gemäß (79). Im Fall  $n_a < n_b$  ist nach (79)  $\varphi_{b\perp} = \varphi_{b\parallel} = 0$  für beliebige  $\vartheta_e$ , so dass sich eine Graphik erübrigt.

Zusammenfassend stellen wir auf der nächsten Seite sämtliche Phasenwinkel nochmal übersichtlich zusammen.

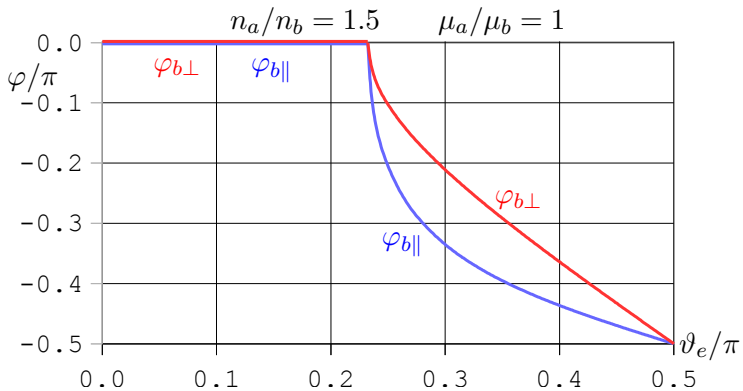


Abb. 15: Die Phasenwinkel  $\varphi_{b\perp}$  und  $\varphi_{b\parallel}$

bei beliebigem  $\vartheta_e$  :

$$\varphi_{e,E} \stackrel{(67h)}{=} 0 \stackrel{(67)}{=} \varphi_{e,B} \quad (98a)$$

bei  $\vartheta_e \leq \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi \stackrel{(77)}{=} \varphi_{r,E} = (0 \text{ ODER } \pi) \quad , \quad \varphi_{r,B} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{r,E} + \pi \quad (98b)$$

$$\varphi_b \stackrel{(77)}{=} \varphi_{b,E} = 0 \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,B} \quad (98c)$$

bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi \stackrel{(77)}{=} \varphi_{r,E} = (93), \text{ siehe Abb.13} \quad (98d)$$

$$\varphi_{r,B} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{r,E} + \pi \quad (98e)$$

$$\varphi_{b\perp} \equiv \varphi_{b,E} \stackrel{(77e)}{=} \varphi_{b,E_z} = (97a), \text{ siehe Abb.15} \quad (98f)$$

$$\varphi_{b,B_x} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_z} - \pi/2 \quad (98g)$$

$$\varphi_{b,B_y} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_z} \quad (98h)$$

$$\varphi_{b\parallel} \equiv \varphi_{b,E} \stackrel{(77f)}{=} \varphi_{b,E_y} = (97b), \text{ siehe Abb.15} \quad (98i)$$

$$\varphi_{b,E_x} \stackrel{(77f)}{=} \varphi_{b,E_y} - \pi/2 = \varphi_{b\perp} - \pi/2 \quad (98j)$$

$$\varphi_{b,B_z} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_y} \stackrel{(67)}{=} \varphi_{b,E_x} + \pi/2 = \varphi_{b\perp} \quad (98k)$$

Man erkennt in den numerischen Berechnungen folgenden Zusammenhang zwischen den Phasenwinkeln:

falls  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  :

$$\varphi_{\perp} = 2\varphi_{b,\perp} \quad , \quad \varphi_{\parallel} - \pi = 2\varphi_{b,\parallel} \quad (99)$$

Dieser Zusammenhang ist kein Zufall. Weil die Maxwell'schen Gleichungen invariant unter Zeitumkehr sind, und weil wir annehmen dass beide Materialien perfekt transparent sind, muss auch der Vorgang der Reflektion invariant unter Zeitumkehr sein. Daraus

folgt, dass die Phasendifferenz zwischen dem evaneszenten Feld und dem einfallenden Feld gleich groß sein muss wie die Phasendifferenz zwischen dem evaneszenten Feld und dem reflektierten Feld. Die zusätzliche Differenz von  $\pi$  bei paralleler Polarisation beruht darauf, dass das reflektierte Feld bei  $\vartheta_e > \vartheta_{e,\text{Brewster}}$  einen Phasensprung von  $\pi$  macht, während für einlaufende Felder nach unserer Phasenkonvention stets  $\varphi_{e,E} = \varphi_{e,B} = 0$  gilt.

$\hat{E}_b/\hat{E}_e \stackrel{(78)}{=} |\tau|$  ist bei  $\vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  bei weitem am größten, und fällt bei größeren Einfallswinkeln schnell gegen Null, wie man aus Abb. 16 erkennt. Weil zudem die Stärke der evaneszenten Felder proportional zu  $e^{-y/\gamma}$  ist, und  $\gamma$  mit steigendem  $\vartheta_e$  laut (46c) kontinuierlich abnimmt, wird man in Versuchsaufbauten wie in Abb. 2 skizziert das bei weitem stärkste Signal bei  $\vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  erwarten.

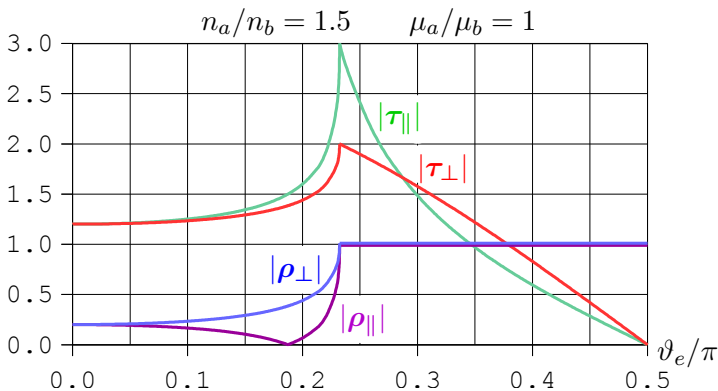


Abb. 16: Beträge der Fresnel-Koeffizienten

Nun wollen wir die Versetzung des reflektierten Strahls (Goos-Hänchen Verschiebung) diskutieren. Die von Artmann[8] publizierte Theorie dieses Effekts wird – trotz verschiedener Einwände und alternativer Ansätze anderer Autoren – auch heute noch als im

Wesentlichen korrekt anerkannt. Ein kurzgefasster Review der theoretischen und experimentellen Arbeiten zur Goos-Hänchen-Verschiebung wurde von Berman [9] zusammengestellt.

Weil Artmann die Berechnungen in ziemlich verwickelter Weise darstellt ist es nützlich, die Darstellung von Ghatak et. al. [10, 11] zu Hilfe zu nehmen. Man findet folgendes Ergebnis für die Größe  $D$  der Goos-Hänchen-Verschiebung:

$$D = -\frac{1}{k_e} \frac{d\varphi}{d\vartheta_e} \quad (100)$$

Die Phasenwinkel der reflektierten Strahlung sind in (93) angegeben. Aus dem unteren Diagramm in Abb. 13 auf Seite 49 erkennt man erstens, dass  $d\varphi/d\vartheta_e$  bei überkritischen Winkeln negativ ist, so dass  $D = (100)$  positiv ist. Zweitens erkennt man aus diesem Diagramm, dass  $D$  bei  $\vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}}$  am größten ist, weil hier die Graphen am steilsten sind. Deshalb haben Goos und Hänchen die Strahlversetzung ausschließlich bei Winkeln  $\vartheta_e$  untersucht, die nur wenig größer als  $\vartheta_{e,\text{kritisch}}$  waren.

Wir wollen nun (100) herleiten. Die Felder (15) sind unendlich ausgedehnt. Damit wir eine Strahlversetzung diskutieren können, muss die Strahlung zumindest in  $x$ -Richtung auf einen schmalen Strahl eingeschnürt werden, wie in Abb. 3 auf Seite 7 skizziert. Wir behalten für

$$k = +\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \frac{n\omega}{c} \quad (101)$$

auch weiterhin einen scharf definierten Wert bei. Deshalb bewirkt eine Einschnürung der Strahlung in  $x$ -Richtung (d. h. ein unscharf definierter Wert von  $k_x$ ) automatisch auch eine Einschnürung in  $y$ -Richtung (d. h. ein unscharf definierter Wert von  $k_y$ ). Und weil im Experiment von Goos und Hänchen die Einschnürung in  $x$ -Richtung um Größenordnungen enger war als in  $z$ -Richtung ist es

unschädlich, wenn wir auch weiterhin eine unendliche Ausdehnung der Strahlung in  $z$ -Richtung (d. h. den scharf definierten Wert  $k_z = 0$ ) annehmen.

Wir verwenden  $k_x \stackrel{(34)}{=} k_{e,x} \stackrel{(34)}{=} k_{r,x}$ , und erzeugen seitlich begrenzte Strahlen mithilfe von Fourier-Integralen. Auf diese Weise erhält man die folgenden Felder:

$$\mathbf{E}_e \stackrel{(15)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \hat{\mathbf{G}}_e e^{i(k_x x + k_{e,y} y - \omega t)} \quad (102a)$$

$$\mathbf{E}_r \stackrel{(15)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \hat{\mathbf{G}}_r e^{i(k_x x + k_{r,y} y - \omega t + \varphi)} \quad (102b)$$

Neben den Amplituden  $\hat{\mathbf{G}}(k_x)$  sind auch die Wellenzahl-Komponenten  $k_y(k_x)$  und der Phasenwinkel  $\varphi(k_x)$  von  $k_x$  abhängig. Wir können diese Größen in Taylorreihen um einen beliebigen Zentralwert  $k_x^{(0)}$  entwickeln. Zum Beispiel gilt für die Phase

$$\varphi(k_x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k_x - k_x^{(0)})^j}{j!} \left. \frac{d^j \varphi}{dk_x^j} \right|_{k_x^{(0)}}. \quad (103)$$

Wenn die Wellenzahlen, bei denen  $\hat{\mathbf{E}}(k_x)$  nennenswert von Null verschieden ist, nur wenig von  $k_x^{(0)}$  abweichen, dann können die Entwicklungen nach dem linearen Glied abgebrochen werden:

$$\varphi(k_x) \approx \varphi(k_x^{(0)}) + (k_x - k_x^{(0)}) \left. \frac{d\varphi}{dk_x} \right|_{k_x^{(0)}} \quad (104)$$

falls  $|k_x - k_x^{(0)}| \ll |k_x^{(0)}|$



In dieser Näherung lauten die Felder

$$\mathbf{E}_e = e^{i(k_x^{(0)}x + k_{e,y}(k_x^{(0)})y - \omega t)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \hat{\mathbf{G}}_e(k_x) e^{i(k_x - k_x^{(0)}) \left( x + \frac{dk_{e,y}}{dk_x} \Big|_{k_x^{(0)}} y \right)} \quad (105a)$$

$$\mathbf{E}_r = e^{i(k_x^{(0)}x + k_{r,y}(k_x^{(0)})y - \omega t + \varphi(k_x^{(0)}))} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \hat{\mathbf{G}}_r(k_x) e^{i(k_x - k_x^{(0)}) \left( x + \frac{dk_{r,y}}{dk_x} \Big|_{k_x^{(0)}} y + \frac{d\varphi}{dk_x} \Big|_{k_x^{(0)}} \right)} \quad (105b)$$

Die vor die Integrale gezogenen Exponentialfunktionen beschreiben unendlich ausgedehnte ebene Wellen, die in  $x$ -Richtung die große Wellenzahl  $k_x^{(0)}$  haben. Unter den Integralen steht die Amplitudenmodulation dieser Wellen mit der kleinen Wellenzahl  $k_x - k_x^{(0)}$ . Die so gebildeten, in  $x$ - und  $y$ -Richtung begrenzten Strahlen haben an der Grenzfläche der Medien (d. h. bei  $y = 0$ ) ihre Intensitätsmaxima bei den  $x$ -Werten, bei denen die Exponentialfunktionen unter den Integralen maximal sind, also bei

$$x_{e,\text{peak}}(y = 0) = 0 \quad (106a)$$

$$x_{r,\text{peak}}(y = 0) = - \frac{d\varphi}{dk_x} \Big|_{k_x^{(0)}} \quad (106b)$$

Aus Abb. 3 auf Seite 7 liest man ab:

$$D = D_x \cos \vartheta_e = \left( x_{r,\text{peak}}(y = 0) - x_{e,\text{peak}}(y = 0) \right) \cos \vartheta_e = \stackrel{(106)}{=} - \cos \vartheta_e \frac{d\varphi}{dk_x} \Big|_{k_x^{(0)}} = - \frac{\cos \vartheta_e}{k_e} \frac{d\varphi}{d \sin \vartheta} \Big|_{\vartheta_e} = - \frac{\cos \vartheta_e}{k_e \cos \vartheta_e} \frac{d\varphi}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta_e} \quad (107)$$

Dies ist identisch mit Artmann's Resultat (100).

Entsprechend den Experimenten von Goos und Hänchen beschränkte Artmann seine theoretische Untersuchung auf Winkel  $\vartheta_e$ , die nur wenig größer sind als  $\vartheta_{e,\text{kritisch}}$ . Das vereinfacht die Formeln wesentlich, weil unter dieser Voraussetzung die jeweils zweiten Summanden in den Nennern von (93) vernachlässigbar klein gegenüber den jeweils ersten Summanden sind. Deshalb gilt in guter Näherung

falls  $\vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}}$

$$\varphi_{\perp} \stackrel{(93)}{=} \arctan \left( \frac{2n_b\mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_a\mu_b \cos \vartheta_e} \right) \lesssim 0 \quad (108a)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\parallel} &\stackrel{(93)}{=} \arctan \left( \frac{2n_a\mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_b\mu_a \cos \vartheta_e} \right) \lesssim \pi \\ &= \pi + \left( \frac{n_a\mu_b}{n_b\mu_a} \right)^2 \cdot \varphi_{\perp} . \end{aligned} \quad (108b)$$

Wegen  $|\varphi_{\perp}| \ll 1$  durfte der konstante Faktor, dessen Größenordnung 1 ist, in die Tangensfunktion hineingezogen werden. Mit der Formel

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (109)$$

findet man

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{\perp}}{d\vartheta_e} &= \frac{-1}{1 + \left( \frac{2n_b\mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}}{n_a\mu_b \cos \vartheta_e} \right)^2} \frac{2n_b\mu_a}{n_a\mu_b} \frac{1}{\cos^2 \vartheta_e} \\ &\cdot \left( [(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1]^{-1/2} (n_a/n_b)^2 \sin \vartheta_e \cos^2 \vartheta_e + \right. \\ &\left. + \sin \vartheta_e \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1} \right) . \end{aligned} \quad (110)$$

Dicht beim kritischen Winkel ist  $(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1 \ll 1$ . Deshalb ist im Nenner und im Zähler jeweils der zweite Summand gegenüber dem ersten vernachlässigbar.

$$\frac{d\varphi_{\perp}}{d\vartheta_e} = - \frac{2n_a\mu_a \sin \vartheta_e}{n_b\mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_e - 1}} \quad (111)$$

Damit ergibt sich die Goos-Hänchen-Verschiebung

falls  $\vartheta_e \gtrsim \vartheta_{e,\text{kritisch}}$

$$\begin{aligned} D_{\perp} &\stackrel{(100)}{=} \frac{1}{k_e} \frac{2\mu_a \sin \vartheta_e}{\mu_b \sqrt{\sin^2 \vartheta_e - (n_b/n_a)^2}} \stackrel{(46c)}{=} \frac{2\mu_a \sin \vartheta_e}{\mu_b} \cdot \gamma = \\ &= \frac{2n_b\mu_a}{n_a\mu_b} \cdot \gamma \end{aligned} \quad (112a)$$

$$D_{\parallel} = \left( \frac{n_a\mu_b}{n_b\mu_a} \right)^2 \cdot D_{\perp} = \frac{2n_a\mu_b}{n_b\mu_a} \cdot \gamma. \quad (112b)$$

Dies Ergebnis stimmt im Rahmen der Messgenauigkeit mit den Beobachtungen von Goos und Hänchen überein. Die Strahlversetzung ist proportional zur Eindringtiefe  $\gamma$ , ist also nahe  $\vartheta_{e,\text{kritisch}}$  am größten, und nimmt mit zunehmendem  $\vartheta_e$  kontinuierlich ab.

## 5. Mehrlagen-Stapel und FTIR

In diesem Abschnitt werden wir die Reflektion und Brechung für einen Stapel von drei Material-Lagen  $a, b, c$  berechnen, wie in Abb. 17 auf der nächsten Seite dargestellt. Die Brechungsindizes der Materialien seien  $n_a, n_b, n_c$ , ihre magnetischen Permeabilitäten  $\mu_a, \mu_b, \mu_c$ . Weil es in jeder Materiallage nur einen relevanten Winkel gibt, nennen wir die drei Winkel jetzt  $\vartheta_a, \vartheta_b, \vartheta_c$ .

Wir definieren die Schreibweise  $\tau_{ab}$  für den Fresnel-Koeffizienten  $\tau_{ab\perp}$  oder  $\tau_{ab\parallel}$ , und die Schreibweise  $\rho_{ab}$  für den Fresnel-Koeffizienten  $\rho_{ab\perp}$  oder  $\rho_{ab\parallel}$ . Die Notationen  $\rho_{ab}$  und  $\tau_{ab}$  werden benutzt,

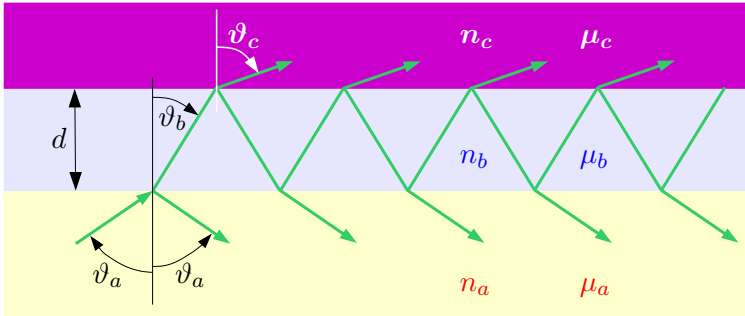


Abb. 17: Ein Stapel aus drei Materialien

wenn die einlaufende Welle aus dem Medium  $a$  kommt auf die Grenzfläche zum Medium  $b$  trifft. Die Notationen  $\rho_{ba}$  und  $\tau_{ba}$  werden benutzt, wenn die einlaufende Welle aus dem Medium  $b$  kommt auf die Grenzfläche zum Medium  $a$  trifft. Die Notationen  $\rho_{bc}$  und  $\tau_{bc}$  werden benutzt, wenn die einlaufende Welle aus dem Medium  $b$  kommt auf die Grenzfläche zum Medium  $c$  trifft.  $\rho_{ba}$  und  $\tau_{ba}$  unterscheiden sich von  $\rho_{ab}$  und  $\tau_{ab}$  dadurch, dass überall die Indizes  $a$  und  $b$  sowie die Winkel  $\vartheta_a$  und  $\vartheta_b$  vertauscht sind, siehe (78).

Außerdem verwenden wir anstelle der bisher benutzen Schreibweisen  $\varphi \equiv \varphi_{r,E}$  und  $\varphi_b \equiv \varphi_{b,E}$  folgende Schreibweisen für die bei Reflexion und Brechung auftretenden Phasenwinkel des elektrischen Feldes:

$$\varphi_{r,ab} \text{ bei Reflexion an der Grenzfläche } ab \quad (113a)$$

$$\varphi_{r,ba} \text{ bei Reflexion an der Grenzfläche } ba \quad (113b)$$

$$\varphi_{t,ab} \text{ bei Transmission durch die Grenzfläche } ab \quad (113c)$$

$$\varphi_{t,ba} \text{ bei Transmission durch die Grenzfläche } ba \quad (113d)$$

$$\varphi_{r,bc} \text{ bei Reflexion an der Grenzfläche } bc \quad (113e)$$

$$\varphi_{t,bc} \text{ bei Transmission durch die Grenzfläche } bc \quad (113f)$$

Wie zuvor stellen wir uns die einfallenden und die reflektierten Wellen als unendlich ausgedehnte ebene Wellen mit unendlicher Kohärenzlänge vor.

Für beliebige Kombinationen  $n_a, n_b, n_c$  und beliebige unter- oder überkritische Einfallswinkel gilt

$$\begin{aligned} k_{a,x} &\stackrel{(34)}{=} k_{b,x} \stackrel{(34)}{=} k_{c,x} = \\ &= k_a \sin \vartheta_a = k_b \sin \vartheta_b = k_c \sin \vartheta_c = \\ &= \frac{n_a \omega}{c} \sin \vartheta_a = \frac{n_b \omega}{c} \sin \vartheta_b = \frac{n_c \omega}{c} \sin \vartheta_c \\ &\implies n_a \sin \vartheta_a = n_b \sin \vartheta_b = n_c \sin \vartheta_c, \end{aligned} \quad (114)$$

wobei  $\vartheta_b$  und/oder  $\vartheta_c$  gemäß (50) möglicherweise komplex sein können. Also gilt für einen Lagenstapel mit einer beliebigen Anzahl von Lagen  $a, b, c, \dots, z$  das Snellius'sche Gesetz  $n_a \sin \vartheta_a = n_z \sin \vartheta_z$  für die Außenlagen, und man braucht Brechungen in den inneren Lagen nicht zu berücksichtigen. Man beachte jedoch, dass diese Aussage sich nur auf die Einfalls- und Ausfallswinkel bezieht. Die Intensitäten der transmittierten und der reflektierten Strahlung werden natürlich durch die Eigenschaften der Innenlagen stark beeinflusst.

Wir wenden uns wieder dem drei-Lagen-Stapel zu. Wenn  $n_a > n_b$  und  $n_c > n_b$  ist, und wenn die Strahlung unter einem Winkel  $\vartheta_a < \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  einfällt, dann ist die Strahlung im Medium  $b$  eine ebene Welle. Folglich ist (aufgrund der Invarianz unter Zeitumkehr)  $\vartheta_c < \vartheta_{c,\text{kritisch}}$ . Wenn  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist, dann ist die Strahlung im Medium  $b$  evaneszent, und der Ausfallswinkel muss  $\vartheta_c > \vartheta_{c,\text{kritisch}}$  sein (wiederum wegen der Invarianz unter Zeitinversion). Folglich ist im Fall  $n_a > n_b < n_c$  der Austrittswinkel des transmittierten Teils der Strahlung  $\vartheta_c = \vartheta_{c,\text{kritisch}}$ , wenn der Einfallswinkel  $\vartheta_a = \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist.

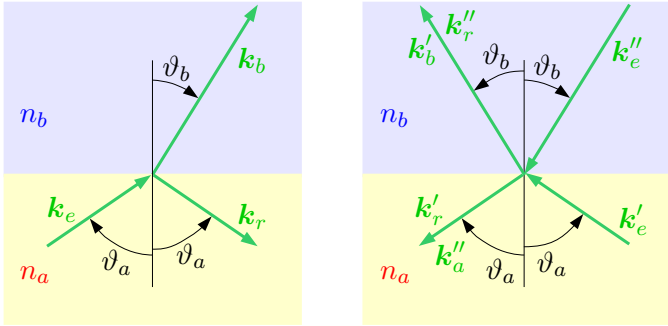


Abb. 18: Zeitumkehr

Die „Stokes-Relationen“

$$\rho_{ab}^2 + \tau_{ba}\tau_{ab} = 1 \quad (115a)$$

$$\rho_{ab} + \rho_{ba} = 0 \quad (115b)$$

werden sich in der folgenden Diskussion als sehr nützlich erweisen. Man beweist sie leicht durch direktes Einsetzen der Fresnel-Koeffizienten (78). Weil die Fresnel-Koeffizienten (78) für beliebige unter- und überkritische Einfallswinkel gelten, gelten auch die Stokes-Relationen (115) für beliebige Einfallswinkel  $0 \leq \vartheta_a \leq \pi/2$ .

Man kann sich die Stokes-Relationen als Folge der Invarianz unter Zeitumkehr plausibel machen. Der Vorgang der Reflexion und Brechung muss invariant unter Zeitumkehr sein, weil wir stets annehmen dass beide Medien keine Energie absorbieren. In Abbildung 18 ist links der Vorgang so skizziert, wie wir ihn bisher betrachtet haben. Bei Inversion der Zeitrichtung entsteht daraus der Vorgang der rechten Skizze:

Eine Welle mit Wellenzahl  $\mathbf{k}'_e = -\mathbf{k}_r$  trifft, aus dem Medium  $a$  kommend, unter dem Winkel  $\vartheta_a$  auf die Grenzfläche zum Medium  $b$ , und wird teilweise ins Medium  $a$  reflektiert und teilweise ins

Medium  $b$  gebrochen. Gleichzeitig trifft eine Welle mit Wellenzahl  $\mathbf{k}_e'' = -\mathbf{k}_b$ , aus dem Medium  $b$  kommend, unter dem Winkel  $\vartheta_b$  auf die Grenzfläche zum Medium  $a$ , und wird teilweise ins Medium  $b$  reflektiert und teilweise ins Medium  $a$  gebrochen. Natürlich müssen die beiden einlaufenden Wellen die gleiche Phasenbeziehung haben wie die beiden auslaufenden Wellen bei dem in der linken Skizze dargestellten Vorgang.

Während die ins Medium  $a$  reflektierten und gebrochenen Wellen sich zur auslaufenden Welle mit Wellenzahl  $\mathbf{k}_r' = \mathbf{k}_a'' = -\mathbf{k}_e$  überlagern, müssen sich die ins Medium  $b$  reflektierten und gebrochenen Wellen mit Wellenzahlen  $\mathbf{k}_b' = \mathbf{k}_r''$  durch Interferenz auslöschen.

Die Fresnel-Relationen

$$\hat{E}_b e^{i\varphi_{t,ab}} \stackrel{(78)}{=} \tau_{ab} \hat{E}_e \quad , \quad \hat{E}_r e^{i\varphi_{r,ab}} \stackrel{(78)}{=} \rho_{ab} \hat{E}_e \quad (116)$$

entsprechen der linken Skizze in Abb. (18). Für die rechte Skizze dieser Abbildung gelten die Relationen

$$\hat{E}'_b e^{i\varphi_{t,ab} + \varphi_{r,ab}} = \tau_{ab} \hat{E}'_e e^{i\varphi_{r,ab}} = \tau_{ab} \hat{E}_r e^{i\varphi_{r,ab}} = \tau_{ab} \rho_{ab} \hat{E}_e \quad (117a)$$

$$\hat{E}'_r e^{i2\varphi_{r,ab}} = \rho_{ab} \hat{E}'_e e^{i\varphi_{r,ab}} = \rho_{ab} \hat{E}_r e^{i\varphi_{r,ab}} = \rho_{ab}^2 \hat{E}_e \quad (117b)$$

$$\hat{E}''_a e^{i\varphi_{t,ba} + \varphi_{t,ab}} = \tau_{ba} \hat{E}''_e e^{i\varphi_{t,ab}} = \tau_{ba} \hat{E}_b e^{i\varphi_{t,ab}} = \tau_{ba} \tau_{ab} \hat{E}_e \quad (117c)$$

$$\hat{E}''_r e^{i\varphi_{r,ba} + \varphi_{t,ab}} = \rho_{ba} \hat{E}''_e e^{i\varphi_{t,ab}} = \rho_{ba} \hat{E}_b e^{i\varphi_{t,ab}} = \rho_{ba} \tau_{ab} \hat{E}_e \quad (117d)$$

Invarianz unter Zeitumkehr impliziert

$$\hat{E}'_r e^{i2\varphi_{r,ab}} + \hat{E}''_a e^{i\varphi_{t,ba} + \varphi_{t,ab}} = \hat{E}_e = \rho_{ab}^2 \hat{E}_e + \tau_{ba} \tau_{ab} \hat{E}_e \quad (118a)$$

$$\hat{E}'_b e^{i\varphi_{t,ab} + \varphi_{r,ab}} + \hat{E}''_r e^{i\varphi_{r,ba} + \varphi_{t,ab}} = 0 = \tau_{ab} \rho_{ab} \hat{E}_e + \rho_{ba} \tau_{ab} \hat{E}_e \quad (118b)$$

woraus durch Kürzen von  $\hat{E}_e$  und  $\tau_{ab}$  die Stokes-Relationen (115) folgen.  $\tau_{ab}$  kann nur bei  $\tau_{ab} \neq 0$  gekürzt werden, also laut (78) bei beliebigem  $\vartheta_a < \pi/2$ . Also haben wir die Stokes-Relationen bei

beliebigem  $\vartheta_a < \pi/2$  auf die Invarianz unter Zeitumkehr zurückgeführt. (Nur aus (78) erkennt man, dass sie auch bei  $\vartheta_a = \pi/2$  gelten.) Obwohl Abbildung 18 nur den Fall  $\vartheta_a \leq \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  darstellen kann, gilt die Interferenzbedingung (118) auch bei überkritischen Einfallswinkeln, bei denen die  $y$ -Komponenten der Wellenvektoren  $k_b, k_e'', k_b', k_r''$  imaginär sind.

### 5.1. Unterkritische Winkel

Wir untersuchen den in Abb. 17 auf Seite 60 skizzierten drei-Lagen-Stapel mit beliebigen Brechungskoeffizienten  $n_a, n_b, n_c$ , wobei wir annehmen dass entweder  $n_a < n_b < n_c$  ist, oder dass  $\vartheta_a \leq \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  und  $\vartheta_c \leq \vartheta_{c,\text{kritisch}}$  sind. Unter dieser Voraussetzung sind die Felder in allen drei Medien ebene Wellen. Die Phasendifferenz zwischen der Welle, die einmal an der Grenzfläche  $bc$  reflektiert und dann ins Medium  $a$  transmittiert wird, relativ zu der direkt an der Grenzfläche  $ab$  reflektierten Welle, ist

$$\varphi_{t,ab} + \varphi_{r,bc} + \varphi_{t,ba} + \eta - \varphi_{r,ab} . \quad (119)$$

$\eta$  ist die geometrische Phasendifferenz

$$\begin{aligned} \eta &= k_b \frac{2d}{\cos \vartheta_b} - k_a \sin \vartheta_a \frac{2d \sin \vartheta_b}{\cos \vartheta_b} = 2dk_b \cos \vartheta_b = \\ &= 2d|k_{b,y}| \stackrel{(53b)}{=} 2d \frac{k_a n_b}{n_a} \cos \vartheta_b . \end{aligned} \quad (120)$$

Für Strahlung, die direkt an der Grenzfläche  $ab$  reflektiert wird, gilt

$$\hat{E}_r^{(1)} e^{i\chi(1)} \equiv \hat{E}_r^{(1)} e^{i\varphi_{r,ab}} \stackrel{(78)}{=} \rho_{ab} \hat{E}_e . \quad (121)$$

Für Strahlung, die ins Medium  $b$  transmittiert wird, einmal an der Grenzfläche  $bc$  reflektiert wird, und dann ins Medium  $a$  transmittiert



tiert wird, gilt

$$\hat{E}_r^{(2)} e^{i\chi(2)} \equiv \hat{E}_r^{(2)} e^{i(\eta + \varphi_{t,ba} + \varphi_{r,bc} + \varphi_{t,ab})} \stackrel{(78)}{=} e^{i\eta} \tau_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e . \quad (122)$$

Für Strahlung, die ein weiteres Mal zwischen den Grenzflächen reflektiert wird, gilt

$$\begin{aligned} \hat{E}_r^{(3)} e^{i\chi(3)} &\equiv \hat{E}_r^{(3)} e^{i(2\eta + \varphi_{t,ba} + \varphi_{r,bc} + \varphi_{r,ba} + \varphi_{r,bc} + \varphi_{t,ab})} \stackrel{(78)}{=} \\ &= e^{i2\eta} \tau_{ba} \rho_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e . \end{aligned} \quad (123)$$

Das insgesamt ins Material  $a$  reflektierte elektrische Feld ist

$$\begin{aligned} \hat{E}_r e^{i\alpha} &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} \hat{E}_r^{(m)} e^{i\chi(m)} = \rho_{ab} \hat{E}_e + e^{i\eta} \tau_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e + \\ &+ e^{i2\eta} \tau_{ba} \rho_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e + \dots \end{aligned} \quad (124)$$

Wie gewohnt definieren wir die Amplitude  $\hat{E}_r$  reell und  $\geq 0$ . Den reflektiven drei-Lagen-Fresnel-Koeffizienten definieren wir als

$$\rho_{abc} \equiv \frac{\hat{E}_r e^{i\alpha}}{\hat{E}_e} = \rho_{ab} + \tau_{ba} \tau_{ab} \rho_{bc} e^{i\eta} \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_{ba} \rho_{bc} e^{i\eta})^j . \quad (125)$$

Bei  $\vartheta_a = \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist  $\vartheta_b = \pi/2$ , und deshalb  $\tau_{ba} \stackrel{(78)}{=} 0$ . Also ist

$$\rho_{abc} = \rho_{ab} \stackrel{(78)}{=} \pm 1 \quad \text{für } \vartheta_a = \vartheta_{a,\text{kritisch}} . \quad (126)$$

Im Fall  $\vartheta_a < \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist  $|\rho_{ba} \rho_{bc} e^{i\eta}| < 1$ , und die geometrische Reihe (125) konvergiert. Dann erhält man

$$\begin{aligned} &\text{falls } \vartheta_a \leq \vartheta_{a,\text{kritisch}} : \\ \rho_{abc} &= \frac{\rho_{ab} - \rho_{ab} \rho_{ba} \rho_{bc} e^{i\eta} + \tau_{ba} \tau_{ab} \rho_{bc} e^{i\eta}}{1 - \rho_{ba} \rho_{bc} e^{i\eta}} \stackrel{(115)}{=} \frac{\rho_{ab} + \rho_{bc} e^{i\eta}}{1 + \rho_{ab} \rho_{bc} e^{i\eta}} \end{aligned} \quad (127)$$

Obwohl wir bei der Herleitung  $\vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ausschließen mussten, stimmt dies Resultat beim kritischen Winkel mit (126) überein. Also gilt (127) für beliebige Winkel  $\leq \vartheta_{a,\text{kritisch}}$ .

Die Transmission durch den Lagenstapel lässt sich auf gleiche Weise berechnen. Für Strahlung, die ohne Mehrfach-Reflektionen durch beide Grenzflächen transmittiert wird, gilt

$$\hat{E}_t^{(1)} e^{i\xi(1)} \equiv \hat{E}_t^{(1)} e^{i(\eta/2+\varphi_{t,bc}+\varphi_{t,ab})} \stackrel{(78)}{=} e^{i\eta/2} \tau_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e . \quad (128a)$$

Für Strahlung, die ins Medium  $b$  transmittiert wird, einmal an der Grenzfläche  $bc$  reflektiert wird, einmal an der Grenzfläche  $ba$  reflektiert wird, und dann ins Medium  $c$  transmittiert wird, gilt

$$\begin{aligned} \hat{E}_t^{(2)} e^{i\xi(2)} &\equiv \hat{E}_t^{(2)} e^{i(3\eta/2+\varphi_{t,bc}+\varphi_{r,ba}+\varphi_{r,bc}+\varphi_{t,ab})} = \\ &\stackrel{(78)}{=} e^{i3\eta/2} \tau_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e . \end{aligned} \quad (128b)$$

Für Strahlung, die ein weiteres Mal zwischen den Grenzflächen reflektiert wird, gilt

$$\begin{aligned} \hat{E}_t^{(3)} e^{i\xi(3)} &\equiv \hat{E}_t^{(3)} e^{i(5\eta/2+\varphi_{t,bc}+\varphi_{r,ba}+\varphi_{r,bc}+\varphi_{r,ba}+\varphi_{r,bc}+\varphi_{t,ab})} = \\ &\stackrel{(78)}{=} e^{i5\eta/2} \tau_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e . \end{aligned} \quad (128c)$$

Das insgesamt ins Material  $c$  transmittierte elektrische Feld ist

$$\begin{aligned} \hat{E}_t e^{i\beta} &\equiv \sum_{m=1}^{\infty} \hat{E}_t^{(m)} e^{i\xi(m)} = e^{i\eta/2} \tau_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e + e^{i3\eta/2} \tau_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e + \\ &\quad + e^{i5\eta/2} \tau_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} \hat{E}_e + \dots \end{aligned} \quad (129)$$

Wie gewohnt definieren wir die Amplitude  $\hat{E}_t$  reell und  $\geq 0$ . Den transmittiven drei-Lagen-Fresnel-Koeffizienten definieren wir als

$$\tau_{abc} \equiv \frac{\hat{E}_t e^{i\beta}}{\hat{E}_e} = \tau_{bc} \tau_{ab} e^{i\eta/2} \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_{ba} \rho_{bc} e^{i\eta})^j . \quad (130)$$

Bei  $\vartheta_a = \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist  $\vartheta_b = \pi/2$ , und deshalb  $\tau_{bc} \stackrel{(78)}{=} 0$ . Also ist

$$\tau_{abc} = 0 \quad \text{für } \vartheta_a = \vartheta_{a,\text{kritisch}} . \quad (131)$$

Im Fall  $\vartheta_a < \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist  $|\rho_{ba}\rho_{bc}e^{i\eta}| < 1$ , und die geometrische Reihe (130) konvergiert. Dann erhält man

$$\begin{aligned} & \text{falls } \vartheta_a \leq \vartheta_{a,\text{kritisch}} : \\ \tau_{abc} & \equiv \frac{\hat{E}_t e^{i\beta}}{\hat{E}_e} = \frac{\tau_{bc}\tau_{ab}e^{i\eta/2}}{1 - \rho_{ba}\rho_{bc}e^{i\eta}} \end{aligned} \quad (132)$$

Obwohl wir bei der Herleitung  $\vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ausschließen mussten, stimmt dies Resultat beim kritischen Winkel mit (131) überein. Also gilt (132) für beliebige Winkel  $\leq \vartheta_{a,\text{kritisch}}$ .

Die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten des Lagenstapels Abb. 17 sind

für  $\vartheta_a \leq \vartheta_{a,\text{kritisch}} :$

$$R = |r_{abc}|^2 \stackrel{(127)}{=} \left| \frac{\rho_{ab} + \rho_{bc}e^{i\eta}}{1 + \rho_{ab}\rho_{bc}e^{i\eta}} \right|^2 \quad (133a)$$

$$T = 1 - R . \quad (133b)$$

Im Fall eines symmetrischen Lagenstapels  $a = c \neq b$  vereinfachen sich die Formeln zu

für  $\vartheta_a \leq \vartheta_{a,\text{kritisch}} :$

$$R = |r_{aba}|^2 = \left| \frac{\rho_{ab} + \rho_{ba}e^{i\eta}}{1 + \rho_{ab}\rho_{ba}e^{i\eta}} \right|^2 \stackrel{(115)}{=} \left| \frac{\rho_{ab} - \rho_{ab}e^{i\eta}}{1 - \rho_{ab}^2 e^{i\eta}} \right|^2 \quad (134a)$$

$$T = 1 - R . \quad (134b)$$

Alternativ können wir auch schreiben

$$T = |t_{aba}|^2 \stackrel{(132)}{=} \left| \frac{\tau_{ba}\tau_{ab}e^{i\eta/2}}{1 - \rho_{ba}^2 e^{i\eta}} \right|^2 \stackrel{(115)}{=} \left| \frac{(1 - \rho_{ab}^2)e^{i\eta/2}}{1 - \rho_{ab}^2 e^{i\eta}} \right|^2 . \quad (134c)$$

In (86) mussten wir die Aufweitung der gebrochenen Strahlung berücksichtigen wie in Abb. 10 dargestellt, um  $T$  als Funktion von  $\tau_{ab}$  zu berücksichtigen. Beim symmetrischen Lagenstapel gilt jedoch  $\vartheta_c = \vartheta_a$ , sodass in (134c) kein Aufweitungsfaktor auftritt. Wir überprüfen die Konsistenz von (134c) mit (134b). Im Fall  $\vartheta_a \leq \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  sind sowohl  $\rho_{ab} \in \mathbb{R}$  als auch  $\eta \in \mathbb{R}$  reell:

$$\begin{aligned} R + T &= (134a) + (134c) = \\ &= \frac{(\rho_{ab} - \rho_{ab}e^{i\eta})(\rho_{ab} - \rho_{ab}e^{-i\eta}) + (1 - \rho_{ab}^2)e^{i\eta/2}(1 - \rho_{ab}^2)e^{-i\eta/2}}{(1 - \rho_{ab}^2e^{i\eta})(1 - \rho_{ab}^2e^{-i\eta})} \\ &= \frac{\rho_{ab}^2 - \rho_{ab}^2e^{-i\eta} - \rho_{ab}^2e^{i\eta} + \rho_{ab}^2 + 1 - \rho_{ab}^2 - \rho_{ab}^2 + \rho_{ab}^4}{1 - \rho_{ab}^2e^{-i\eta} - \rho_{ab}^2e^{i\eta} + \rho_{ab}^4} = 1 \quad (135) \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass (134c) mit (134b) konsistent ist.

Man erkennt aus (134) deutlich, wie man im Fall  $\vartheta_a < \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  die reflektiven Eigenschaften des Lagenstapels durch Variation von  $d$ , und damit von  $\eta = (120)$ , gezielt beeinflussen kann. Mit  $e^{i\eta} = 1$  (und damit  $e^{i\eta/2} = -1$ ) wird  $R = 0$  und  $T = 1$ . Mit  $e^{i\eta} = -1$  wird  $R$  maximiert und  $T$  minimiert.

## 5.2. Überkritische Winkel

Den Fall  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  werden wir ausschließlich für Lagenstapel mit  $n_a > n_b < n_c$  diskutieren, aber nicht für Lagenstapel mit  $n_a > n_b > n_c$ . Bei  $n_a > n_b < n_c$  und  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  werden die evaneszenten Felder im Medium  $b$  durch

$$\mathbf{E}_b \stackrel{(46)}{=} \hat{\mathbf{E}}_b e^{-y/\gamma + i(xk_{e,x} - \omega t + \varphi_{b,E})} \quad (136a)$$

$$\mathbf{B}_b \stackrel{(46)}{=} \hat{\mathbf{B}}_b e^{-y/\gamma + i(xk_{e,x} - \omega t + \varphi_{b,B})} \quad (136b)$$

beschrieben. Anstelle des geometrischen Phasenwinkels  $\eta$  tritt bei Vielfach-Reflexionen für jeden Durchgang in beliebiger Richtung

durch die Lage  $b$  ein Dämpfungsfaktor  $e^{-d/\gamma}$  auf. Deshalb erhält man nun anstelle von (129)

$$\begin{aligned} \tau_{abc} \equiv \frac{\hat{E}_t e^{i\beta}}{\hat{E}_e} &= e^{-d/\gamma} \tau_{bc} \tau_{ab} + e^{-3d/\gamma} \tau_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} + \\ &+ e^{-5d/\gamma} \tau_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} + \dots \end{aligned} \quad (137)$$

Dank der exponentiellen Dämpfung ist stets  $|\rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma}| < 1$ , so dass die geometrische Reihe konvergiert.

falls  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  :

$$\tau_{abc} = \tau_{bc} \tau_{ab} e^{-d/\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} (\rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma})^j = \frac{\tau_{bc} \tau_{ab} e^{-d/\gamma}}{1 - \rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma}} \quad (138)$$

Als reflektiven Koeffizienten erhält man anstelle von (124)

$$\begin{aligned} \rho_{abc} \equiv \frac{\hat{E}_r e^{i\alpha}}{\hat{E}_e} &= \rho_{ab} + e^{-2d/\gamma} \tau_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} + e^{-4d/\gamma} \tau_{ba} \rho_{bc} \rho_{ba} \rho_{bc} \tau_{ab} + \dots \\ &= \rho_{ab} + \tau_{ba} \tau_{ab} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} (\rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma})^j \end{aligned} \quad (139)$$

Dank der exponentiellen Dämpfung ist stets  $|\rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma}| < 1$ , so dass die geometrische Reihe konvergiert.

falls  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  :

$$\begin{aligned} \rho_{abc} &= \frac{\rho_{ab} - \rho_{ab} \rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma} + \tau_{ba} \tau_{ab} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma}}{1 - \rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma}} \\ &\stackrel{(115)}{=} \frac{\rho_{ab} + \rho_{bc} e^{-2d/\gamma}}{1 - \rho_{ba} \rho_{bc} e^{-2d/\gamma}} \end{aligned} \quad (140)$$

Offensichtlich wären wir auch zu (138) und (140) gelangt, wenn wir einfach in (132) und (127)  $i\eta$  durch  $-2d/\gamma$  ersetzt hätten.

Die Reflektions- und Transmissionskoeffizienten des Lagenstapels Abb. 17 sind

für  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  :

$$R = |r_{abc}|^2 \stackrel{(140)}{=} \left| \frac{\rho_{ab} + \rho_{bc}e^{-2d/\gamma}}{1 - \rho_{ba}\rho_{bc}e^{-2d/\gamma}} \right|^2 \quad (141a)$$

$$T = 1 - R . \quad (141b)$$

Im Fall eines symmetrischen Lagenstapels  $a = c \neq b$  vereinfachen sich die Formeln zu

für  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  :

$$R = |\rho_{aba}|^2 = \left| \frac{\rho_{ab} - \rho_{ab}e^{-2d/\gamma}}{1 - \rho_{ab}^2e^{-2d/\gamma}} \right|^2 \quad (142a)$$

$$T = 1 - R . \quad (142b)$$

Alternativ können wir auch schreiben

$$T = |\tau_{aba}|^2 \stackrel{(138)}{=} \left| \frac{\tau_{ba}\tau_{ab}e^{-d/\gamma}}{1 - \rho_{ab}^2e^{-2d/\gamma}} \right|^2 \stackrel{(115)}{=} \left| \frac{(1 - \rho_{ab}^2)e^{-d/\gamma}}{1 - \rho_{ab}^2e^{-2d/\gamma}} \right|^2 . \quad (142c)$$

In (86) mussten wir die Aufweitung der gebrochenen Strahlung berücksichtigen wie in Abb. 10 dargestellt, um  $T$  als Funktion von  $\tau_{ab}$  zu berücksichtigen. Beim symmetrischen Lagenstapel gilt jedoch  $\vartheta_c = \vartheta_a$ , sodass in (142c) kein Aufweitungsfaktor auftritt. Wir überprüfen die Konsistenz von (142c) mit (142b). Im Fall  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist  $\rho_{ab} \in \mathbb{C}$  im allgemeinen komplex, und es ist  $|\rho_{ab}|^2 = 1$ :

$$\begin{aligned}
 R + T &= (142a) + (142c) = \\
 &= \frac{(\rho_{ab} - \rho_{ab}e^{-2d/\gamma})(\rho_{ab}^* - \rho_{ab}^*e^{-2d/\gamma}) +}{(1 - \rho_{ab}^2e^{-2d/\gamma})(1 - [\rho_{ab}^2]^*e^{-2d/\gamma})} \\
 &\quad + \frac{(1 - \rho_{ab}^2)e^{-d/\gamma}(1 - [\rho_{ab}^2]^*)e^{-d/\gamma}}{} \\
 &= \frac{1 - e^{-2d/\gamma} - e^{-2d/\gamma} + e^{-4d/\gamma} +}{1 - [\rho_{ab}^2]^*e^{-2d/\gamma} - \rho_{ab}^2e^{-2d/\gamma} + e^{-4d/\gamma}} \\
 &\quad + \frac{e^{-2d/\gamma} - [\rho_{ab}^2]^*e^{-2d/\gamma} - \rho_{ab}^2e^{-2d/\gamma} + e^{-2d/\gamma}}{} = 1 \quad (143)
 \end{aligned}$$

Damit ist die Konsistenz von (142c) mit (142b) bewiesen.

Im Fall  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist  $R = (141a) \approx 1$  für  $d \gg \gamma$ , und  $R \approx 0$  für  $d \ll \gamma$ . Nur bei  $d = \infty$  ist  $R$  genau 1 und  $T$  genau Null. Bei endlichem  $d$  bilden die Gleichungen (141) (bzw. (142) beim symmetrischen Lagenstapel) eine quantitative Beschreibung der Intensitäten, die beim Phänomen der frustrierten totalen inneren Reflexion (FTIR) beobachtet werden.

Bei  $d > \gamma$  ist

$$T \stackrel{(142c)}{=} \left| \frac{(1 - \rho_{ab}^2)e^{-d/\gamma}}{1 - \rho_{ab}^2e^{-2d/\gamma}} \right|^2 \approx \left| 1 - \rho_{ab}^2 \right|^2 e^{-2d/\gamma} \quad \text{für } d > \gamma \quad (144)$$

eine brauchbare Näherung, die mit  $d \gg \gamma$  eine exzellente Näherung wird. Dies ist die exponentielle Abnahme von  $T$  mit  $d$ , die Meixner et. al. [5] für großes  $d$  gefunden haben, siehe Gleichung (58) auf Seite 25. Bei kleinem  $d$  fanden sie eine signifikant kleinere Abnahme. Sie erklärten diese Beobachtung jedoch nicht mit unserer Formel (142c), weil diese Formel unendlich ausgedehnte Oberflächen annimmt, zwischen denen die FTIR stattfindet. Dagegen benutzten Meixner et. al. in ihrem Experiment als zweite Oberfläche eine Spitze mit nur 80 nm effektiver Apertur, d. h. einer Apertur die signifikant kleiner war als die verwendete Wellenlänge von 514.5 nm.

Deshalb fitteten sie richtigerweise ihre Ergebnisse nicht an (142c), sondern an einen speziell im Hinblick auch die begrenzte Apertur ihres Detektors berechneten Korrekturfaktor.

Abschließend wollen wir noch die FTIR eines zeitlich und räumlich (zumindest in  $xy$ -Richtung) begrenzten Wellenpakets untersuchen, dessen Peak zur Zeit  $t_e = 0$ , aus dem Medium  $a$  kommend, unter dem Winkel  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  bei  $x_e = 0$  auf die Grenzfläche zum Medium  $b$  trifft. Wir nehmen einen symmetrischen Lagenstapel  $aba$  mit  $n_c = n_a > n_b$  an. Die Schichtdicke des Mediums  $b$  ist  $d$ . Die Situation ist in Abb. 19 skizziert. Wir wollen vier Fragen klären:

- \* An welcher Stelle  $x_r$  der Grenzfläche ( $y = 0$ ) wird der Peak des reflektierten Wellenpakets erscheinen?
- \* An welcher Stelle  $x_t$  der Grenzfläche ( $y = d$ ) wird der Peak des transmittierten Wellenpakets erscheinen?
- \* Zu welcher Zeit  $t_r$  wird der Peak des reflektierten Wellenpaketes am Punkt ( $x = x_r, y = 0$ ) erscheinen?
- \* Zu welcher Zeit  $t_t$  wird der Peak des transmittierten Wellenpaketes am Punkt ( $x = x_t, y = d$ ) erscheinen?

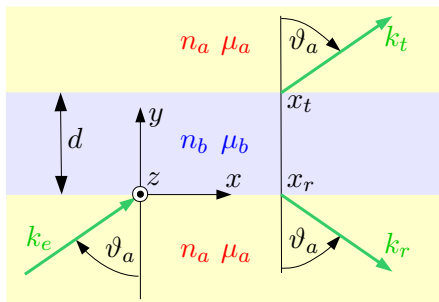


Abb. 19: Frustrierte totale innere Reflexion (FTIR)



Wir definieren die skalaren Momentanwerte

$$\tilde{E}_e(t, \mathbf{r}) = \hat{E}_e e^{i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_e - \omega t)} \quad (145a)$$

$$\tilde{E}_r(t, \mathbf{r}) \stackrel{(139)}{=} \hat{E}_r e^{i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_r - \omega t + \alpha)} = \rho_{aba} \tilde{E}_e(t, \mathbf{r}) \quad (145b)$$

$$\tilde{E}_t(t, \mathbf{r}) \stackrel{(137)}{=} \hat{E}_t e^{i(\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}_t - \omega t + \beta)} = \tau_{aba} \tilde{E}_e(t, \mathbf{r}) \quad (145c)$$

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_e, \quad |\mathbf{k}_r| = |\mathbf{k}_e|, \quad k_{r,y} = -k_{e,y},$$

die nicht mit den Beträgen  $E_e, E_r, E_t$  verwechselt werden dürfen. Während die Beträge stets  $\geq 0$  sind, oszillieren die Momentanwerte um Null, und nehmen dabei positive und negative Werte an.

Aus (145) liest man ab:

$$\rho_{aba} = |\rho_{aba}| e^{i\alpha} \quad (146a)$$

$$\tau_{aba} = |\tau_{aba}| e^{i\beta} \quad (146b)$$

Wir folgen der Darstellung von Ghatak und Banerjee [10, 11], und bilden aus den Feldern (145) durch Fourier-Transformationen der Felder (145) räumlich und zeitlich begrenzte Wellenpakete. Mit  $k_x \stackrel{(34)}{=} k_{e,x} \stackrel{(34)}{=} k_{r,x} \stackrel{(34)}{=} k_{t,x}$  gilt:

$$\tilde{E}_e = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{G}_e e^{i(k_x x + k_{e,y} y - \omega t)} \quad (147a)$$

$$\tilde{E}_r = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\rho_{aba}| \hat{G}_e e^{i(k_x x + k_{r,y} y - \omega t + \alpha)} \quad (147b)$$

$$\tilde{E}_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |\tau_{aba}| \hat{G}_e e^{i(k_x x + k_{e,y}(y-d) - \omega t + \beta)} \quad (147c)$$

Man beachte, dass im Exponenten der letzten Funktion der Faktor  $(y - d)$  auftritt, anstelle des Faktors  $y$  in den beiden ersten

Funktionen. Im Bereich zwischen  $y = 0$  und  $y = d$  sind die Felder evaneszent. Auf der Strecke von  $y = 0$  nach  $y = d$  gibt es den Phasensprung  $\beta$ , aber keine zusätzliche Phasenänderung durch das Produkt  $k_{e,y}y$ .

Die Fourier-Amplitude  $\hat{G}_e$ , die Wellenzahl-Komponenten  $k_{e,y}$  und  $k_{r,y} = -k_{e,y}$ , die Beträge  $|\rho_{aba}|$  und  $|\tau_{aba}|$  der Fresnel-Koeffizienten, sowie die Phasenwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  sind Funktionen der beiden Integrationsvariablen  $k_x$  und  $\omega$ . Es ist  $k_a \equiv k_e = k_r$  und  $k_{a,y}^2 \equiv k_{e,y}^2 = k_{r,y}^2$ . Wir betrachten  $k_x$  und  $\omega$  als voneinander unabhängige Variable. Das bedeutet: Bei der Variation von  $k_x$  wird

$$k_a = \frac{\omega n_a}{c} = \sqrt{k_x^2 + k_{a,y}^2} = \quad (148a)$$

= konstant bei Integration über und Ableitung nach  $k_x$

konstant gehalten. Dadurch legt die Fourier-Amplitude  $\hat{G}_e$  nicht nur das Spektrum der  $k_x$ -Werte des Wellenpakets fest, sondern indirekt auch das Spektrum der  $k_y$ -Werte. Die Integration über  $k_x$  schnürt die unendlich ausgedehnten Wellenfelder auf einen in  $x$ - und  $y$ -Richtung begrenzten Strahl ein. Nur in  $z$ -Richtung bleiben die Felder unendlich ausgedehnt.

Bei der Variation von  $\omega$  wird

$$k_x = \sqrt{k_a^2 - k_{a,y}^2} = \sqrt{\omega^2 n_a^2 c^{-2} - k_{a,y}^2} = \quad (148b)$$

= konstant bei Integration über und Ableitung nach  $\omega$

konstant gehalten. Die Integration über  $\omega$  bewirkt, dass der Strahl zu einem zeitlich begrenzten Wellenpaket wird, das sich entlang der Linie des Strahls bewegt.

Die Exponenten von (147) enthalten die vier Variablen  $k_{e,y}$ ,  $k_{r,y} = -k_{e,y}$ ,  $\alpha$ , und  $\beta$ . Diese Größen können in Taylor-Reihen um Zentralwerte  $k_x^{(0)}$  und  $\omega^{(0)}$  entwickelt werden. Wir nehmen an, dass die Fourier-Amplitude  $\hat{G}_e$  nur in einer so kleinen Umgebung von

$k_x^{(0)}$  und  $\omega^{(0)}$  nennenswert von Null verschieden ist, dass die Taylor-Reihen in guter Näherung nach dem linearen Glied abgebrochen werden können. Dann gilt z. B. für  $k_{e,y}$ :

$$\begin{aligned} k_{e,y}(k_x, \omega) &= k_{e,y}(k_x^{(0)}, \omega^{(0)}) + (k_x - k_x^{(0)}) \left. \frac{dk_{e,y}}{dk_x} \right|_{k_x^{(0)}} + \\ &+ (\omega - \omega^{(0)}) \left. \frac{dk_{e,y}}{d\omega} \right|_{\omega^{(0)}} \end{aligned} \quad (149)$$

In dieser Näherung lauten die Gleichungen (147):

$$\begin{aligned} \tilde{E}_e &= e^{i(k_x^{(0)} x + k_{e,y}^{(0)} y - \omega^{(0)} t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{G}_e \cdot \\ &\cdot e^{i\left([k_x - k_x^{(0)}] \left[x + y \frac{dk_{e,y}}{dk_x}\right] - [\omega - \omega^{(0)}] \left[t - y \frac{dk_{e,y}}{d\omega}\right]\right)} \end{aligned} \quad (150a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_r &= e^{i(k_x^{(0)} x + k_{e,y}^{(0)} y - \omega^{(0)} t + \alpha^{(0)})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{G}_e \cdot \\ &\cdot e^{i\left([k_x - k_x^{(0)}] \left[x + y \frac{dk_{e,y}}{dk_x} + \frac{d\alpha}{dk_x}\right] - [\omega - \omega^{(0)}] \left[t - y \frac{dk_{e,y}}{d\omega} - \frac{d\alpha}{d\omega}\right]\right)} \end{aligned} \quad (150b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_t &= e^{i(k_x^{(0)} x + (y-d)k_{e,y}^{(0)} - \omega^{(0)} t + \beta^{(0)})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{G}_e \cdot \\ &\cdot e^{i\left([k_x - k_x^{(0)}] \left[x + (y-d) \frac{dk_{e,y}}{dk_x} + \frac{d\beta}{dk_x}\right] - [\omega - \omega^{(0)}] \left[t - (y-d) \frac{dk_{e,y}}{d\omega} - \frac{d\beta}{d\omega}\right]\right)} \end{aligned} \quad (150c)$$

Es versteht sich, dass die Ableitungen nach  $k_x$  an der Stelle  $k_x^{(0)}$  und die Ableitungen nach  $\omega$  an der Stelle  $\omega^{(0)}$  zu nehmen sind. Die vor die Integrale gezogenen Exponentialfunktionen beschreiben unendlich ausgedehnte ebene Wellen mit der großen Wellenzahl  $k_x^{(0)}$ ,  $k_{e,y}^{(0)}$  und der hohen Frequenz  $\omega^{(0)}$ . Unter den Integralen steht die Amplitudenmodulation dieser Wellen mit der kleinen Wellenzahl  $k_x - k_x^{(0)}$

und der niedrigen Frequenz  $\omega - \omega^{(0)}$ . Die so gebildeten, in Raum und Zeit begrenzten Wellenpakete haben an den Grenzflächen der Materialien (d. h. bei  $y = 0$  und  $y = d$ ) ihre Intensitätsmaxima bei den  $x$ -Werten und den  $t$ -Werten, bei denen die Exponentialfunktionen unter den Integralen maximal (d. h. gleich Eins) sind. Die Exponentialfunktionen sind dann gleich Eins, wenn die rot hervorgehobenen Klammern in (150) gleich Null sind.

Der Peak des einlaufenden Wellenpakets erreicht zur Zeit  $t = t_{e,\text{peak}}$  die Grenzfläche  $y = 0$  bei  $x = x_{e,\text{peak}}$ . Aus der Exponentialfunktion des Integranden von (150a) liest man ab:

$$x_{e,\text{peak}} = 0 \quad (151a)$$

$$t_{e,\text{peak}} = 0 \quad (151b)$$

Zur Zeit  $t = t_{r,\text{peak}}$  taucht der Peak des reflektierten Wellenpakets an der Stelle  $x = x_{r,\text{peak}}, y = 0$  der Grenzfläche auf. Aus (150b) liest man ab:

$$x_{r,\text{peak}} = - \left. \frac{d\alpha}{dk_x} \right|_{k_x^{(0)}} \quad (151c)$$

$$t_{r,\text{peak}} = + \left. \frac{d\alpha}{d\omega} \right|_{\omega^{(0)}} \quad (151d)$$

Der Peak des transmittierten Wellenpakets taucht zur Zeit  $t_{t,\text{peak}}$  an der Stelle  $x = x_{t,\text{peak}}, y = d$  der anderen Grenzfläche auf. Aus (150c) liest man ab:

$$x_{t,\text{peak}} = - \left. \frac{d\beta}{dk_x} \right|_{k_x^{(0)}} \quad (151e)$$

$$t_{t,\text{peak}} = + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega^{(0)}} \quad (151f)$$

Die Phasenwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  berechnen wir mithilfe von

$$k_e = \frac{\omega n_a}{c} \quad (152a)$$

$$k_x = k_e \sin \vartheta_a = \frac{\omega n_a}{c} \sin \vartheta_a \quad (152b)$$

$$-k_{r,y} = k_{e,y} = k_e \cos \vartheta_a = \frac{\omega n_a}{c} \cos \vartheta_a \quad (152c)$$

$$\begin{aligned} \gamma &\stackrel{(46c)}{=} \frac{1}{k_e \sqrt{\sin^2 \vartheta_a - (n_b/n_a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{k_x^2 - (\omega n_b/c)^2}} = \\ &= \frac{1}{\omega n_a \sqrt{\sin^2 \vartheta_a - \sin^2 \vartheta_{a,\text{kritisch}}}} \end{aligned} \quad (152d)$$

und den Definitionen

$$K_a \equiv n_a \mu_b \cos \vartheta_a \stackrel{(152c)}{=} \frac{k_{e,y} c \mu_b}{\omega} \quad (153a)$$

$$K_b \equiv n_b \mu_a \cos \vartheta_a \stackrel{(152c)}{=} \frac{n_b k_{e,y} c \mu_a}{n_a \omega} \quad (153b)$$

$$W_a \equiv n_a \mu_b \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_a - 1} \stackrel{(152d)}{=} \frac{n_a \mu_b c}{n_b \gamma \omega} \quad (153c)$$

$$W_b \equiv n_b \mu_a \sqrt{(n_a/n_b)^2 \sin^2 \vartheta_a - 1} \stackrel{(152d)}{=} \frac{\mu_a c}{\gamma \omega} . \quad (153d)$$

Wir betrachten weiterhin einen symmetrischen Lagenstapel  $n_a = n_c > n_b$  bei überkritischen Einfallswinkeln  $\vartheta_a > \vartheta_{a,\text{kritisch}}$ . Mit den Abkürzungen (153) werden die Fresnel-Koeffizienten (88) zu

$$\rho_{ab\perp} = \frac{K_a - iW_b}{K_a + iW_b} \quad (154a)$$

$$\rho_{ab\parallel} = \frac{-K_b + iW_a}{K_b + iW_a} . \quad (154b)$$

Indem man diese Koeffizienten in

$$\rho_{aba} \stackrel{(142a)}{=} \frac{\rho_{ab}(1 - e^{-2d/\gamma})}{1 - \rho_{ab}^2 e^{-2d/\gamma}} \quad (155a)$$

$$\tau_{aba} \stackrel{(142c)}{=} \frac{(1 - \rho_{ab}^2)e^{-d/\gamma}}{1 - \rho_{ab}^2 e^{-2d/\gamma}} \quad (155b)$$

einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned}
 \tau_{aba\perp} &= \frac{([K_a + iW_b]^2 - [K_a - iW_b]^2)e^{-d/\gamma}}{[K_a + iW_b]^2 - [K_a - iW_b]^2 e^{-2d/\gamma}} \\
 &= \frac{i4K_a W_b}{(K_a^2 - W_b^2)(e^{+d/\gamma} - e^{-d/\gamma}) + i2K_a W_b(e^{+d/\gamma} + e^{-d/\gamma})} \\
 &= \frac{i2K_a W_b \operatorname{csch}(d/\gamma)}{K_a^2 - W_b^2 + i2K_a W_b \operatorname{cth}(d/\gamma)} \\
 &\stackrel{(153)}{=} \frac{i2k_{e,y}\mu_b\mu_a\gamma^{-1} \operatorname{csch}(d/\gamma)}{(k_{e,y}\mu_b)^2 - (\mu_a\gamma^{-1})^2 + i2k_{e,y}\mu_b\mu_a\gamma^{-1} \operatorname{cth}(d/\gamma)}
 \end{aligned} \tag{156a}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{aba\perp} &\stackrel{(142a)}{=} \frac{(K_a - iW_b)(K_a + iW_b)(1 - e^{-2d/\gamma})}{(K_a + iW_b)^2 - (K_a - iW_b)^2 e^{-2d/\gamma}} \\
 &= \frac{(K_a^2 + W_b^2)(e^{+d/\gamma} - e^{-d/\gamma})}{(K_a^2 - W_b^2)(e^{+d/\gamma} - e^{-d/\gamma}) + i2K_a W_b(e^{+d/\gamma} + e^{-d/\gamma})} \\
 &= \frac{K_a^2 + W_b^2}{K_a^2 - W_b^2 + i2K_a W_b \operatorname{cth}(d/\gamma)} \\
 &\stackrel{(153)}{=} \frac{(k_{e,y}\mu_b)^2 + (\mu_a\gamma^{-1})^2}{(k_{e,y}\mu_b)^2 - (\mu_a\gamma^{-1})^2 + i2k_{e,y}\mu_b\mu_a\gamma^{-1} \operatorname{cth}(d/\gamma)}
 \end{aligned} \tag{156b}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{aba\parallel} &= \frac{[(K_b + iW_a)^2 - (K_b - iW_a)^2]e^{-d/\gamma}}{(K_b + iW_a)^2 - (K_b - iW_a)^2 e^{-2d/\gamma}} \\
 &= \frac{i4K_b W_a}{(K_b^2 - W_a^2)(e^{+d/\gamma} - e^{-d/\gamma}) + i2K_b W_a(e^{+d/\gamma} + e^{-d/\gamma})} \\
 &= \frac{i2K_b W_a \operatorname{csch}(d/\gamma)}{K_b^2 - W_a^2 + i2K_b W_a \operatorname{cth}(d/\gamma)} \\
 &\stackrel{(153)}{=} \frac{i2k_{e,y}\mu_a\mu_b\gamma^{-1} \operatorname{csch}(d/\gamma)}{(n_b/n_a)^2(k_{e,y}\mu_a)^2 - (n_a/n_b)^2(\mu_b\gamma^{-1})^2 + i2k_{e,y}\mu_a\mu_b\gamma^{-1} \operatorname{cth}(d/\gamma)}
 \end{aligned} \tag{156c}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{aba\parallel} &\stackrel{(142a)}{=} -\frac{(K_b + iW_a)(K_b - iW_a)(1 - e^{-2d/\gamma})}{(K_b + iW_a)^2 - (K_b - iW_a)^2 e^{-2d/\gamma}} \\
 &= -\frac{(K_b^2 + W_a^2)(e^{+d/\gamma} - e^{-d/\gamma})}{(K_b^2 - W_a^2)(e^{+d/\gamma} - e^{-d/\gamma}) + i2K_b W_a(e^{+d/\gamma} + e^{-d/\gamma})} \\
 &= -\frac{K_b^2 + W_a^2}{K_b^2 - W_a^2 + i2K_b W_a \operatorname{cth}(d/\gamma)} \\
 &\stackrel{(153)}{=} -\frac{(n_b/n_a)^2 (k_{e,y}\mu_a)^2 + (n_a/n_b)^2 (\mu_b\gamma^{-1})^2}{(n_b/n_a)^2 (k_{e,y}\mu_a)^2 - (n_a/n_b)^2 (\mu_b\gamma^{-1})^2 +} \\
 &\quad \frac{+i2k_{e,y}\mu_a\mu_b\gamma^{-1} \operatorname{cth}(d/\gamma)}{\phantom{(n_b/n_a)^2 (k_{e,y}\mu_a)^2 - (n_a/n_b)^2 (\mu_b\gamma^{-1})^2 +}} \quad (156d)
 \end{aligned}$$

Wir definieren die Abkürzungen

$$k_{e,y\perp} \equiv \frac{\mu_b}{\mu_a} k_{e,y} \quad , \quad k_{e,y\parallel} \equiv \frac{n_b^2 \mu_a}{n_a^2 \mu_b} k_{e,y} \quad (157)$$

und berechnen die Phasenwinkel  $\beta$  und  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 \tau_{aba\perp} &\stackrel{(156a)}{=} \frac{2K_a W_b \operatorname{csch}(d/\gamma) [2K_a W_b \operatorname{cth}(d/\gamma) + i(K_a^2 - W_b^2)]}{|K_a^2 - W_b^2 + i2K_a W_b \operatorname{cth}(d/\gamma)|^2} = \\
 &= |\tau_{aba\perp}| e^{i\beta_{\perp}} \implies \beta_{\perp} = \arctan\left(\frac{K_a^2 - W_b^2}{2K_a W_b \operatorname{cth}(d/\gamma)}\right) \\
 \beta_{\perp} &\stackrel{(153),(157)}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\gamma k_{e,y\perp} \operatorname{cth}(d/\gamma)}{\gamma^2 k_{e,y\perp}^2 - 1}\right) \quad (158a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{aba\perp} &\stackrel{(156b)}{=} \frac{K_a^4 - W_b^4 - i2(K_a^3 W_b + K_a W_b^3) \operatorname{cth}(d/\gamma)}{|K_a^2 - W_b^2 + i2K_a W_b \operatorname{cth}(d/\gamma)|^2} = \\
 &= |\rho_{aba\perp}| e^{i\alpha_{\perp}} \implies \alpha_{\perp} = \arctan\left(\frac{-2(K_a^3 W_b + K_a W_b^3) \operatorname{cth}(d/\gamma)}{K_a^4 - W_b^4}\right) \\
 \alpha_{\perp} &\stackrel{(153),(157)}{=} -\arctan\left(\frac{2\gamma k_{e,y\perp} \operatorname{cth}(d/\gamma)}{\gamma^2 k_{e,y\perp}^2 - 1}\right) \quad (158b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{aba\parallel} &\stackrel{(156c)}{=} \frac{2K_b W_a \operatorname{csch}(d/\gamma) [2K_b W_a \operatorname{cth}(d/\gamma) + i(K_b^2 - W_a^2)]}{|(K_b^2 - W_a^2) + i2K_b W_a \operatorname{cth}(d/\gamma)|^2} = \\
 &= |\tau_{aba\parallel}| e^{i\beta_{\parallel}} \implies \beta_{\parallel} = \arctan\left(\frac{K_b^2 - W_a^2}{2K_b W_a \operatorname{cth}(d/\gamma)}\right) \\
 \beta_{\parallel} &\stackrel{(153),(157)}{=} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{2\gamma k_{e,y\parallel} \operatorname{cth}(d/\gamma)}{\gamma^2 k_{e,y\parallel}^2 - 1}\right) \quad (158c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{aba\parallel} &\stackrel{(156d)}{=} \frac{-K_b^4 + W_a^4 + i2(K_b^3 W_a + K_b W_a^3) \operatorname{cth}(d/\gamma)}{|K_b^2 - W_a^2 + i2K_b W_a \operatorname{cth}(d/\gamma)|^2} = \\
 &= |\rho_{aba\parallel}| e^{i\alpha_{\parallel}} \implies \alpha_{\parallel} = \arctan\left(\frac{2(K_b^3 W_a + K_b W_a^3) \operatorname{cth}(d/\gamma)}{-K_b^4 + W_a^4}\right) \\
 \alpha_{\parallel} &\stackrel{(153),(157)}{=} -\arctan\left(\frac{2\gamma k_{e,y\parallel} \operatorname{cth}(d/\gamma)}{\gamma^2 k_{e,y\parallel}^2 - 1}\right) \quad (158d)
 \end{aligned}$$

Weil die Phasenwinkel bei senkrechter und paralleler Polarisation die gleiche Form haben, können die folgenden Berechnungen mit nicht genauer spezifizierten Parametern  $\alpha$ ,  $\beta$ , und  $k_{e,y}$  durchgeführt werden. Da  $\alpha$  und  $\beta$  sich nur durch einen konstanten Summanden unterscheiden, folgt aus (151)

$$x_{r,\text{peak}} = x_{t,\text{peak}} \quad \text{und} \quad t_{r,\text{peak}} = t_{t,\text{peak}} . \quad (159)$$

Die Ableitung von  $\alpha$  nach  $k_x$  ist

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha}{dk_x} &= -\frac{1}{1 + \left(\frac{2\gamma k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma)}{\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1}\right)^2} \cdot 2 \left[ \frac{(\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1) \cdot}{\left(\frac{d\gamma}{dk_x} k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma) + \gamma \frac{dk_{e,y}}{dk_x} \operatorname{cth}(d/\gamma) + \gamma k_{e,y} \frac{d \operatorname{cth}(d/\gamma)}{dk_x}\right) -} \right. \\
 &\quad \left. \frac{(\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1)^2}{-2 \left(\gamma \frac{d\gamma}{dk_x} k_{e,y}^2 + \gamma^2 k_{e,y} \frac{dk_{e,y}}{dk_x}\right) \gamma k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma)} \right] =
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= - \frac{2}{(\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1)^2 + (2\gamma k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma))^2} \cdot \left[ \right. \\
 &\quad - (\gamma^2 k_{e,y}^2 + 1) k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma) \frac{d\gamma}{dk_x} - \\
 &\quad - (\gamma^2 k_{e,y}^2 + 1) \gamma \operatorname{cth}(d/\gamma) \frac{dk_{e,y}}{dk_x} + \\
 &\quad \left. + (\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1) \gamma k_{e,y} \frac{d \operatorname{cth}(d/\gamma)}{dk_x} \right]. \tag{160}
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Differentialquotienten

$$\frac{d\gamma}{dk_x} \stackrel{(152d)}{=} -k_x \cdot [k_x^2 - (\omega n_b/c)^2]^{-3/2} = -k_x \gamma^3 \tag{161a}$$

$$\frac{dk_{e,y}}{dk_x} \stackrel{(148b)}{=} -k_x [\omega^2 n_a^2 c^{-2} - k_x^2]^{-1/2} = -\frac{k_x}{k_{e,y}} \tag{161b}$$

$$\frac{d \operatorname{cth}(d/\gamma)}{dk_x} = \left( \frac{d/\gamma}{\sinh(d/\gamma)} \right)^2 \cdot \frac{(-1)}{d} \cdot (-k_x \gamma^3) \tag{161c}$$

in (160) ergibt

$$\begin{aligned}
 x_{r,\text{peak}} &\stackrel{(151c)}{=} - \frac{d\alpha}{dk_x} \stackrel{(158)}{=} - \frac{d\beta}{dk_x} \stackrel{(151e)}{=} x_{t,\text{peak}} = \\
 &= + \frac{2}{(\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1)^2 + (2\gamma k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma))^2} \cdot \left[ \right. \\
 &\quad + (\gamma^2 k_{e,y}^2 + 1) k_x \gamma^3 k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma) + \\
 &\quad + (\gamma^2 k_{e,y}^2 + 1) \gamma \frac{k_x}{k_{e,y}} \operatorname{cth}(d/\gamma) + \\
 &\quad \left. + (\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1) \gamma k_{e,y} \frac{\gamma^3 k_x}{d} \cdot \left( \frac{d/\gamma}{\sinh(d/\gamma)} \right)^2 \right] \tag{162} \\
 &\stackrel{d \ll \gamma}{=} 0 \quad \text{wegen } \operatorname{cth}^{-2}
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{d \gg \gamma}} \frac{2(\gamma^2 k_{e,y}^2 + 1)(\gamma^3 k_{e,y} k_x + \gamma k_x k_{e,y}^{-1})}{(\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1)^2 + (2\gamma k_{e,y})^2}$$

Es ist bemerkenswert, dass das Ergebnis bei  $d \gg \gamma$  in Strenge von  $d$  unabhängig und endlich ist. Es tritt also bei steigendem  $d$  ein Sättigungseffekt ein.

Bei  $\vartheta_a = \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  ist  $d \ll \gamma$  für jedes endliche  $d$ , weil  $\gamma = (152d)$  bei  $\vartheta_a = \vartheta_{a,\text{kritisch}}$  divergiert. Der Faktor  $\text{cth}(d/\gamma)$  im Nenner kann die hohen Potenzen von  $\gamma$  im Zähler nicht kompensieren. Eine zweite Divergenz, für die wir uns aber nicht interessieren, gibt es bei  $\vartheta_a = \pi/2$  durch den Faktor  $k_{e,y}$  im Nenner.

Für eine numerische Auswertung von (162) wählen wir  $n_a = 1.5$  (Glas),  $n_b = 1$  (Luft),  $\omega = 3 \cdot 10^{15}$  Hz (rotes Licht mit Wellenlänge = 633 nm in Luft). Wir nehmen senkrechte Polarisation des Lichts an. Wegen  $\mu_a = \mu_b$  gilt in diesem Fall  $k_{e,y\perp} \stackrel{(157)}{=} k_{e,y}$ . Im unteren Diagramm von Abb. 20 auf der nächsten Seite ist dargestellt, wie  $x_{r,\text{peak}} = x_{t,\text{peak}}$  bei festgehaltenem  $d = 1 \mu\text{m}$  vom Winkel  $\vartheta_a$  abhängt. Der kritische Winkel ist  $\vartheta_{a,\text{kritisch}} = 0.23228 \pi$ , der kleinste im Diagramm eingetragene Winkel ist  $\vartheta_a = 0.23230 \pi$ . Der größte im Diagramm eingetragene Winkel ist  $\vartheta_a = 0.49656 \pi$ . Man beachte die logarithmische Skala der  $y$ -Achse.

Im oberen Diagramm von Abb. 20 ist  $x_{r,\text{peak}} = x_{t,\text{peak}}$  bei festgehaltenem  $\vartheta_a = 0.23228 \pi$  für einige Werte des Abstands  $d$  dargestellt. Man beachte die logarithmische Skala der  $x$ -Achse. Bei  $d \approx 10 \mu\text{m}$  wird der Sättigungswert von  $x_{\text{peak}} \approx 9 \mu\text{m}$  erreicht.

Indem man die Ableitungen

$$\frac{d\gamma}{d\omega} \stackrel{(152d)}{=} [k_x^2 - (\omega n_b/c)^2]^{-3/2} \frac{\omega n_b^2}{c^2} = \frac{\gamma^3 \omega n_b^2}{c^2} \quad (163a)$$

$$\frac{dk_{e,y}}{d\omega} \stackrel{(148b)}{=} \frac{\omega n_a^2}{c^2 k_{e,y}} \quad (163b)$$

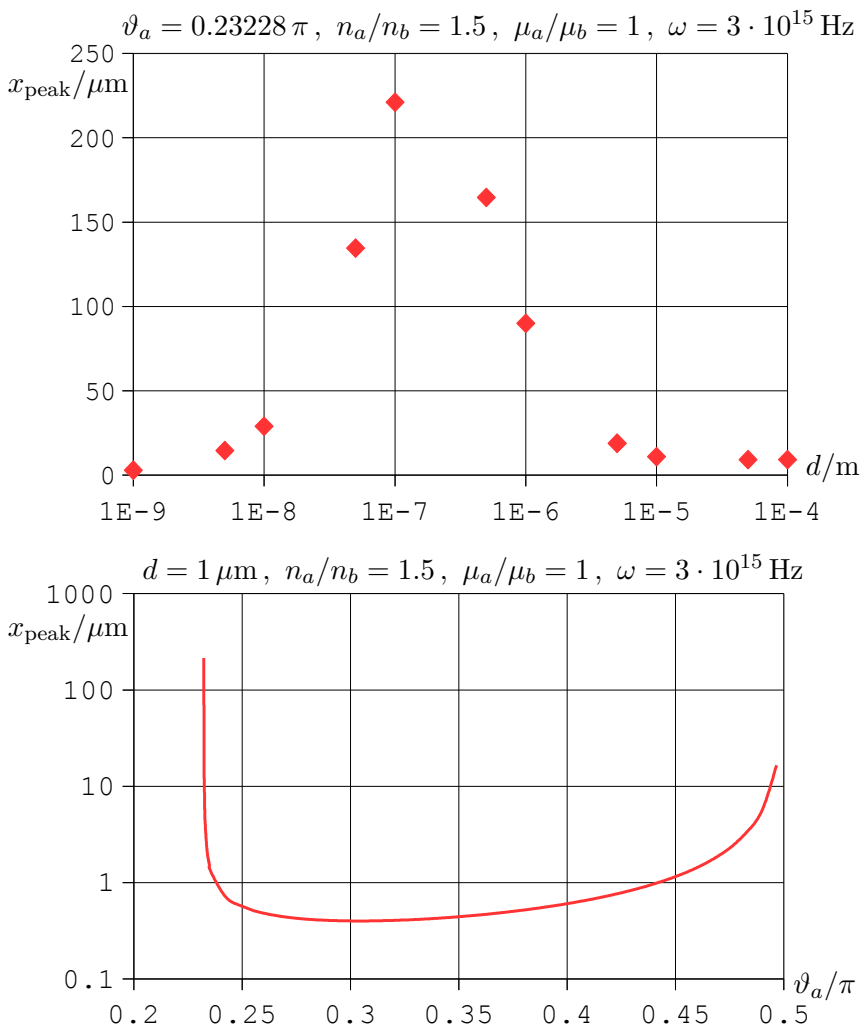


Abb. 20: Die Verschiebung  $x_{r,\text{peak}} = x_{t,\text{peak}}$

$$\frac{d \operatorname{cth}(d/\gamma)}{d\omega} = - \left( \frac{d/\gamma}{\sinh(d/\gamma)} \right)^2 \cdot \frac{\gamma^3 \omega n_b^2}{dc^2} \quad (163c)$$

anstelle der Ableitungen nach  $k_x$  in (160) einsetzt, findet man

$$\begin{aligned} t_{r,\text{peak}} &\stackrel{(151d)}{=} + \frac{d\alpha}{d\omega} \Big|_{\omega^{(0)}} \stackrel{(158)}{=} + \frac{d\beta}{d\omega} \Big|_{\omega^{(0)}} \stackrel{(151f)}{=} t_{t,\text{peak}} = \\ &= \frac{2}{(\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1)^2 + (2\gamma k_{e,y} \operatorname{cth}(d/\gamma))^2} \cdot \left[ \right. \\ &\quad (\gamma^2 k_{e,y}^2 + 1) k_{e,y} \frac{\gamma^3 \omega n_b^2}{c^2} \operatorname{cth}(d/\gamma) + \\ &\quad + (\gamma^2 k_{e,y}^2 + 1) \gamma \frac{\omega n_a^2}{c^2 k_{e,y}} \operatorname{cth}(d/\gamma) + \\ &\quad \left. + (\gamma^2 k_{e,y}^2 - 1) \gamma^4 k_{e,y} \frac{\omega n_b^2}{dc^2} \left( \frac{d/\gamma}{\sinh(d/\gamma)} \right)^2 \right] \quad (164) \\ &\stackrel{d \ll \gamma}{=} 0 \quad \text{wegen } \operatorname{cth}^{-2} \end{aligned}$$

Dies Ergebnis hat die gleiche Form wie die Formel für  $x_{r,\text{peak}} = x_{t,\text{peak}}$ . Wieder gibt es die Divergenz von  $\gamma$  beim kritischen Winkel  $\vartheta_{a,\text{kritisch}}$ , und wieder gibt es bei  $d \gg \gamma$  einen Sättigungseffekt.

Das Ergebnis (164) wird für die Parameter  $n_a = 1.5$  (Glas),  $n_b = 1$  (Luft),  $\omega = 3 \cdot 10^{15}$  Hz (rotes Licht mit Wellenlänge = 633 nm in Luft) und senkrechte Polarisation in Abb. 21 auf der nächsten Seite dargestellt. Das untere Diagramm zeigt, wie  $t_{r,\text{peak}} = t_{t,\text{peak}}$  bei festgehaltenem  $d = 1 \mu\text{m}$  vom Winkel  $\vartheta_a$  abhängt. Der kritische Winkel ist  $\vartheta_{a,\text{kritisch}} = 0.23228 \pi$ , der kleinste im Diagramm eingetragene Winkel ist  $\vartheta_a = 0.23230 \pi$ . Der größte im Diagramm eingetragene Winkel ist  $\vartheta_a = 0.49656 \pi$ . Man beachte die logarithmische Skala der  $y$ -Achse.

Im oberen Diagramm von Abb. 21 ist  $t_{r,\text{peak}} = t_{t,\text{peak}}$  bei festgehaltenem  $\vartheta_a = 0.23228 \pi$  für einige Werte des Abstands  $d$  dargestellt. Man beachte die logarithmische Skala der  $x$ -Achse. Bei

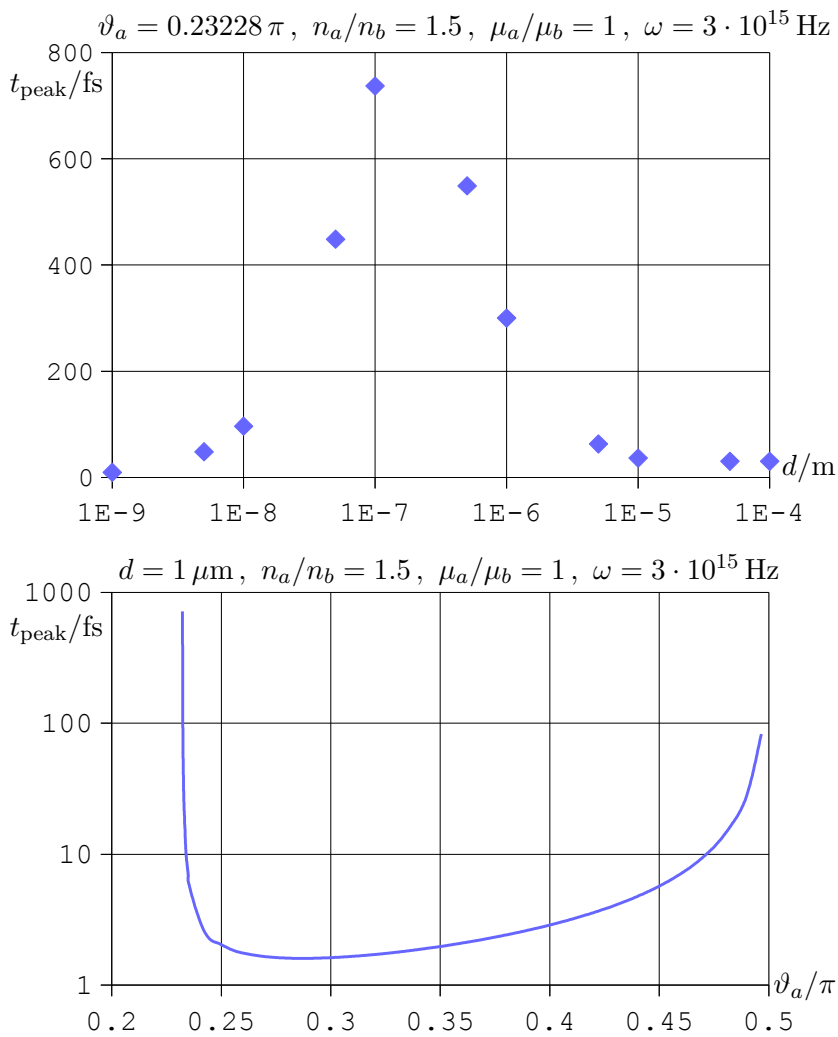


Abb. 21 : Die Verzögerung  $t_{r,\text{peak}} = t_{t,\text{peak}}$

$d \approx 15 \mu\text{m}$  wird der Sättigungswert von  $t_{\text{peak}} \approx 30 \cdot 10^{-15}\text{s}$  erreicht. Dies ist das merkwürdigste Ergebnis der ganzen Untersuchung. Man könnte durch eine unregelmäßige Folge von Lichtpulsen Nachrichten übertragen. Für jeden bei  $y = 0$  abgesendeten Lichtpuls würde der Empfänger etwa 30 fs später bei  $y = d$  einen Lichtpuls detektieren können, egal wie groß  $d$  ist! Die empfangenen Lichtpulse wären zwar sehr klein (nämlich exponentiell gedämpft) im Vergleich zu den gesendeten Pulsen, aber der Sender könnte ja mit außerordentlich starken Signalen arbeiten. Es ist umstritten, ob man mithilfe evaneszenter Pulse tatsächlich Nachrichten mit einer Geschwindigkeit übertragen kann, die größer als die Geschwindigkeit des Lichts im Vakuum ist. Einen lesenswerten Review zu diesem Thema findet man in [12].

## Literatur

- [1] M. Born, E. Wolf: *Principles of Optics* (Pergamon Press, Oxford, 2<sup>nd</sup> ed. 1964)
- [2] John David Jackson: *Classical Electrodynamics* (John Wiley, New York, USA, 3<sup>rd</sup> ed. 2001)
- [3] John David Jackson: *Klassische Elektrodynamik* (de Gruyter, Berlin, 4. Aufl., 2006)
- [4] Isaac Newton: *Opticks* (W. Innys, 4<sup>th</sup> ed., London, 1730)  
<https://archive.org/details/opticksortreatis1730newt>
- [5] A. J. Meixner, M. A. Bopp, G. Tarrach: *Direct measurement of standing evanescent waves with a photon-scanning tunneling microscope*, App. Opt. **33**, 7995-8000 (1994)
- [6] F. Goos, H. Hänchen: *Ein neuer und fundamentaler Versuch zur Totalreflektion*, Ann. Phys. (Leipzig) VI **1**, 333-346 (1947)

- [7] F. Goos, H. Lindberg-Hänchen: *Neumessung des Strahlversetzungseffektes bei Totalreflektion*, Ann. Phys. (Leipzig) VI **5**, 251-252 (1949)
- [8] K. Artmann: *Berechnung der Seitenversetzung des totalreflektierten Strahles*, Ann. Phys. (Leipzig) VI **2**, 87-102 (1948)
- [9] Paul R. Berman: *Goos-Hänchen effect*, Scholarpedia **7**, 11584 (2012)  
[doi:10.4249/scholarpedia.11584](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.11584)
- [10] A. K. Ghatak, M. R. Shenoy, I. C. Goyal, K. Thyagarajan: *Beam Propagation under frustrated total Reflection*, Opt. Com. **56**, 313-317 (1986)
- [11] A. Ghatak, S. Banerjee: *Temporal delay of a pulse undergoing frustrated total internal reflection* Appl. Opt. **28**, 1960-1961 (1989)
- [12] H. G. Winful: *Tunneling time, the Hartman effect, and superluminality: A proposed resolution of an old paradox*, Phys. Rep. **436**, 1-69 (2006)