

Fourier-Reihe und Fourier-Transformation

Dies ist eine Formelsammlung mit nur wenigem erklärenden Text, zur Unterstützung bei der Anwendung der komplexen Fourier-Reihe, der reellen Fourier-Reihe, der diskreten komplexen Fourier-Reihe, und der komplexen Fourier-Transformation.

1. Die komplexe Fourier-Reihe

Jede komplexwertige Funktion $A(t) \in \mathbb{C}$ einer reellen Variablen $t \in \mathbb{R}$ kann in eine Fourier-Reihe zerlegt werden, wenn sie stückweise stetig und quadratintegrabel ist,¹ und wenn sie darüber hinaus entweder periodisch mit der Periode T ist oder nur auf dem endlichen Intervall $[t_0, t_0 + T] \in \mathbb{R}$ definiert ist, so dass sie periodisch mit der Periode T fortgesetzt werden kann:

$$A(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1a)$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten $c_k \in \mathbb{C}$ sind

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} dt A(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad . \quad (1b)$$

Mit der Umbenennung $c_{-k} \leftrightarrow c_k$ entsteht aus diesen Formeln

¹ Sämtliche Funktionen, die in der Physik vorkommen, erfüllen dies Kriterium.

$$A(t) \stackrel{(1a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{-ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$c_k \stackrel{(1b)}{=} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) e^{+ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad .$$

Es ist also egal, ob man im ersten Exponenten $+i$ und im zweiten Exponenten $-i$ schreibt, oder umgekehrt. Beide Konventionen tauchen in der Literatur vielfach auf. Man muss halt nur darauf achten, dass man stets konsistent bei einer Konvention bleibt.

2. Die reelle Fourier-Reihe

Wenn $A(t)$ reellwertig ist, dann ist

$$c_0 \stackrel{(1b)}{=} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t)$$

offensichtlich reell. Aber alle anderen Fourier-Koeffizienten $c_k =$ (1b) sind im Allgemeinen auch bei $A(t) \in \mathbb{R}$ komplex. Um in diesem Fall die Reihenentwicklung mit reellen Fourier-Koeffizienten zu formulieren, nutzt man dass der Fourier-Koeffizient c_k im Fall $A(t) \in \mathbb{R}$ offensichtlich konjugiert komplex zum Koeffizienten c_{-k} ist:

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \stackrel{(1b)}{=} c_k = \overline{c_{-k}} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) e^{+ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (2)$$

Also kann man im Fall $A(t) \in \mathbb{R}$ die Reihe (1a) folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned}
 A(t) &\stackrel{(1a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad \text{mit } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\
 &= c_0 + \sum_{k=+1}^{+\infty} \left(c_k e^{+ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} + \overline{c_k} e^{-ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \right) \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots \quad (3)
 \end{aligned}$$

Mit den Definitionen

$$\frac{a_k - ib_k}{2} := c_k \quad \text{mit } a_k, b_k \in \mathbb{R} \quad (4a)$$

$$x := k \frac{2\pi}{T} \cdot t \quad (4b)$$

und der Euler'schen Formel

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \quad (4c)$$

ergibt sich für die Fourier-Reihe

$$\begin{aligned}
 A(t) &\stackrel{(3)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} (\cos x + i \sin x) + \frac{a_k + ib_k}{2} (\cos x - i \sin x) \right] \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \cos(k \frac{2\pi}{T} \cdot t) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{T} \cdot t) \right] \quad (5a)
 \end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten sind

$$\frac{a_k - ib_k}{2} \stackrel{(4a)}{=} c_k \stackrel{(1b)}{=} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad .$$

Mit (4c) folgen daraus die reellen Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) \cos(k \frac{2\pi}{T} \cdot t) \quad (5b)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) \sin(k \frac{2\pi}{T} \cdot t) \quad . \quad (5c)$$

3. Die diskrete komplexe Fourier-Reihe

In vielen technischen Anwendungen liegt $A(t)$ nicht als kontinuierliche Funktion vor, sondern als Folge von N diskreten Werte A_n mit $n = 0, 1, 2, \dots, (N-1)$.² Dann werden die Fourier-Koeffizienten nicht durch das Integral (1b) bestimmt, sondern durch die Summe

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-ik \frac{2\pi}{N} \cdot n} \quad , \quad (6a)$$

und die Fourier-Reihe (1a) wird zu

$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{+ik \frac{2\pi}{N} \cdot n} \quad . \quad (6b)$$

Bei den kontinuierlichen Reihen (1) und (5) muss man unendlich viele Fourier-Koeffizienten berechnen (sprich: die Folgen analytisch, aber nicht numerisch berechnen) um die Funktion exakt darzustellen. Für eine exakte Darstellung der N Elemente der Folge $\{A_n\}$ benötigt man dagegen genau N Fourier-Koeffizienten. Das ist vernünftig, weil die Folgen $\{A_n\}$ und $\{c_k\}$ genau gleich viel Information enthalten, nämlich jeweils $2N$ reelle Zahlen, N für die Realteile und N für die Imaginärteile jeder Folge.

² Das ist offensichtlich *immer* der Fall, wenn man die Reihe nicht analytisch sondern mit endlich vielen Stützstellen am PC berechnet.

Falls alle $A_n \in \mathbb{R}$ reell sind, besteht der Informationsinhalt der Folge $\{A_n\}$ aus nur N reellen Zahlen, und in der Folge der Fourier-Koeffizienten $\{c_k\}$ entfallen wegen

$$c_0 \stackrel{(6a)}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \in \mathbb{R} \quad ; \quad c_{N/2} \stackrel{(6a)}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \cdot (-1)^n \in \mathbb{R} \quad (7)$$

2 Imaginärteile. Die Imaginärteile aller anderen $N - 2$ Fourier-Koeffizienten sind aber im Allgemeinen auch im Fall reeller A_n von Null verschieden. Diese $N - 2$ Koeffizienten enthalten jedoch nur $N/2 - 1$ unabhängige Realteile und $N/2 - 1$ unabhängige Imaginärteile, weil $c_{N-k} = \overline{c_k}$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{N-k} &\stackrel{(6a)}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n e^{-i(N-k)\frac{2\pi}{N} \cdot n} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} A_n \underbrace{e^{-iN\frac{2\pi}{N} \cdot n}}_{=1} e^{+ik\frac{2\pi}{N} \cdot n} = \overline{c_k} \end{aligned} \quad (8)$$

Man braucht demnach im Fall reeller A_n zusätzlich zu c_0 und $c_{N/2}$ nur $N/2 - 1$ weitere Fourier-Koeffizienten c_k zu berechnen, der Rest ergibt sich aus (8).

Der Informationsgehalt der Folge $\{c_k\}$ im Fall einer rein reellen Folge $\{A_n\}$ ist 2 Realteile gemäß (7) plus $N/2 - 1$ Realteile plus $N/2 - 1$ Imaginärteile gemäß (8), macht insgesamt N reelle Zahlen. Die Folgen $\{c_k\}$ und $\{A_n\}$ haben also auch in diesem Fall den gleichen Informationsgehalt.

4. Die komplexe Fourier-Transformation

Wenn die komplexwertige Funktion $A(t) \in \mathbb{C}$ einer reellen Variablen $t \in \mathbb{R}$ stückweise stetig und quadratintegrabel ist,³ aber — anders

³ Sämtliche Funktionen, die in der Physik vorkommen, erfüllen dies Kriterium.

als in Abschnitt 1 angenommen — $A(t)$ nicht periodisch ist und für beliebige $t \in \mathbb{R}$ definiert ist, dann kann $A(t)$ nicht in die Fourier-Reihe (1) entwickelt werden, wohl aber durch die Fourier-Transformation

$$A(t) = \int_{f=-\infty}^{+\infty} df \, C(f) e^{+if2\pi t} \quad (9a)$$

$$C(f) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} dt \, A(t) e^{-if2\pi t} \quad (9b)$$

mit $t \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathbb{C}$, $C(f) \in \mathbb{C}$

dargestellt werden. Man kann sich die Fourier-Transformation (9) plausibel machen, indem man die nicht-periodische Funktion $A(t) \in \mathbb{C}$ als periodische Funktion mit unendlich großer Periodenlänge $T \rightarrow \infty$ betrachtet. Unter dieser Bedingung wird in den Exponentialfunktionen der Fourier-Reihe

$$A(t) \stackrel{(1a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ik\frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (1a)$$

$$c_k \stackrel{(1b)}{=} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt \, A(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T} \cdot t} \quad (1b)$$

die Schrittweite $(k+1)/T - k/T = 1/T$ unendlich klein, so dass der Übergang zur kontinuierlichen Variablen

$$f := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{k}{T} \quad , \quad -\infty \leq f \leq +\infty \quad (10a)$$

$$\text{Schrittweite von } f = df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \quad (10b)$$

sinnvoll ist. Hier habe ich betont, dass f beliebige Werte von $f = -\infty$ bis $f = +\infty$ annehmen kann. Denn bei beliebig großem aber endlichem T nimmt die Exponentialfunktion das komplette Spektrum von Werten $e^{-i\infty}$ bis $e^{+i\infty}$ an. Also ist es plausibel, dass sie das bei $T \rightarrow \infty$ immer noch tut, und lediglich aus dem diskreten Spektrum das kontinuierliche Spektrum $e^{-i\infty}$ bis $e^{+i\infty}$ wird.

Wegen $c_k \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$ definiert man anstelle von c_k die Funktion

$$C(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot c_k . \quad (11)$$

Diese Funktion ist

$$\begin{aligned} C(f) &\stackrel{(1b)}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} T \cdot \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} dt A(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} = \\ &\stackrel{(10a)}{=} \int_{t=-\infty}^{+\infty} dt A(t) e^{-if 2\pi t} = (9b) . \end{aligned}$$

Jetzt prüfen wir, ob die Fourier-Reihe (1a) bei $T \rightarrow \infty$ gegen die Fourier-Transformation (9a) konvergiert:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} (1a) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{+ik \frac{2\pi}{T} \cdot t} \\ &\stackrel{(10a), (11)}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} C(f) e^{+if 2\pi \cdot t} \\ &\stackrel{(10b)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} df C(f) e^{+if 2\pi \cdot t} = (9a) \end{aligned}$$

Viele Autoren führen in (9) die Variablen-Substitution

$$\omega = 2\pi f \quad ; \quad d\omega = 2\pi df \quad ; \quad D(\omega) := C\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \quad (12)$$

ein. Damit erhält man die Fourier-Transformation

$$A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} d\omega \, D(\omega) e^{+i\omega t} \quad (13a)$$

$$D(\omega) = \int_{t=-\infty}^{+\infty} dt \, A(t) e^{-i\omega t} \quad (13b)$$

mit $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $A(t) \in \mathbb{C}$, $D(\omega) \in \mathbb{C}$.