Robertson's Berechnung der Unbestimmtheitsrelation

Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation wurde 1929 durch Robertson quantitativ präzise formuliert.

Inhalt

1. Übersicht

In seinem Artikel „Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik“ [1] leitete Werner Heisenberg erstmals *Unbestimmtheitsrelationen* zwischen solchen beobachtbaren Grössen her, deren Matrixelemente im Formalismus der Quantentheorie nicht gleichzeitig wohldefinierte Werte besitzen. Er zeigte, dass es sich dabei gerade um solche Messgrössen handelt, die nicht gleichzeitig einem präzisen messtechnischen Zugriff zugänglich sind.

Heisenberg legte – wie im Titel seiner Arbeit angekündigt – besonderen Wert auf Anschaulichkeit. Eine formal präzisere Unbestimmtheitsrelation gab Howard Percy Robertson in seinem Aufsatz „The Uncertainty Principle“ [2] im Frühjahr 1929 an. Wir leiten im Abschnitt „Unbestimmtheitsrelation“ diese Relation in der von Robertson beschriebenen Form her, und beweisen dass sie für beliebige hermitesche Operatoren und beliebige Zustandsfunktionen gültig ist.

Zuvor stellen wir im Abschnitt „Grundlagen“ kurz einige fundamentale Begriffe der Quantentheorie zusammen, nicht zuletzt um dabei auch die im Folgenden benutzte Notation zu definieren. Dann geben wir im Abschnitt „Unbestimmtheit“ eine quantitativ exakte Definition dessen, was wir unter der Unbestimmtheit einer Messgrösse verstehen. Diese Definition ist rein formal. Mit keinem Wort gehen wir auf die weitreichenden erkenntnistheoretischen und philosophischen Fragen ein, die mit diesem Schlüsselbegriff der Quantentheorie verbunden sind.

2. Grundlagen

2.1. Das Skalarprodukt der Zustandsfunktionen

Die Zustandsfunktionen $|\psi\rangle$ der Quantentheorie sind Elemente eines Vektorraumes $\mathcal{H}$ über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen. Sie heissen Zustandsfunktionen, weil sie Informationen über den Zustand eines physikalischen Systems enthalten. Das Skalarprodukt S der Zustandsfunktionen ist als bilineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{C}$ definiert:

$$
\begin{aligned}
S : \mathcal{H} &\to \mathbb{C} \\
S(|\psi\rangle, |\phi\rangle) &= \langle\phi|\psi\rangle \in \mathbb{C} \;\text{ mit } |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften (der Stern* bedeutet „konjugiert komplex“):

$$\langle\phi|\psi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle^* \tag{2a}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \geq 0 \tag{2b}$$

$$\langle\phi|\psi + \chi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle + \langle\phi|\chi\rangle \tag{2c}$$

$$\langle\phi|c\psi\rangle = c\langle\phi|\psi\rangle \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \tag{2d}$$

$$\langle c\phi|\psi\rangle = c^*\langle\phi|\psi\rangle \quad \text{mit } c \in \mathbb{C} \tag{2e}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\phi|\psi\rangle = \langle\frac{\partial\phi}{\partial x}|\psi\rangle + \langle\phi|\frac{\partial\psi}{\partial x}\rangle \tag{2f}$$

Wegen (2a) ist das Skalarprodukt einer Zustandsfunktion mit sich selbst immer reell

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle^* \in \mathbb{R} \quad , \tag{3}$$

so dass (2b) sinnvoll ist. Wir beweisen auch noch die Schwarz'sche[1] Ungleichung

$$\langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \quad , \tag{4}$$

die für beliebige Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle$ gültig ist. Im Fall $|\psi\rangle = |\phi\rangle$ ist sie trivialerweise richtig, wir brauchen also nur noch den Fall $|\psi\rangle \neq |\phi\rangle$ zu betrachten. Höchstens einer der beiden Vektoren kann dann gleich dem Nullvektor sein (für den als einzigem Vektor $\langle 0|0\rangle = 0$ gilt), und wir legen o.B.d.A. für den folgenden Beweis

$$\langle\phi|\phi\rangle \neq 0 \tag{5}$$

fest. Für beliebige Vektoren $\in \mathcal{H}$, und für beliebige $c \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(2b)}{\leq} \langle\psi + c\phi|\psi + c\phi\rangle \\ 0 &\leq \langle\psi|\psi\rangle + c^*\langle\phi|\psi\rangle + c\langle\psi|\phi\rangle + c^*c\langle\phi|\phi\rangle \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen $c^*\langle\phi|\psi\rangle \overset{(2a)}{=} (c\langle\psi|\phi\rangle)^*$ ist $(c^*\langle\phi|\psi\rangle + c\langle\psi|\phi\rangle) \in \mathbb{R}$. Und natürlich ist auch das Betragsquadrat $c^*c\langle\phi|\phi\rangle \in \mathbb{R}$. Wir dürfen also auf beiden Seiten der Ungleichung $c^*\langle\phi|\psi\rangle + c\langle\psi|\phi\rangle + c^*c\langle\phi|\phi\rangle$ subtrahieren:

[1] Übrigens hat Cauchy diese Ungleichung schon ein halbes Jahrhundert vor Schwarz entdeckt.

$$-c^*\langle\phi|\psi\rangle - c\langle\psi|\phi\rangle - c^*c\langle\phi|\phi\rangle \leq \langle\psi|\psi\rangle \tag{7}$$

Mit der Definition

$$c \equiv -d \cdot \frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle}\ ,\ c^* \equiv -d^* \cdot \frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle} \quad \text{mit } d \in \mathbb{C} \tag{8}$$

folgt

$$\begin{aligned} d^*\frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle}\langle\phi|\psi\rangle + d\frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle}\langle\psi|\phi\rangle - d^*\frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle}d\frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\langle\phi|\phi\rangle}\langle\phi|\phi\rangle \leq \langle\psi|\psi\rangle \\ (d^* + d - d^*d) \cdot \langle\psi|\phi\rangle\langle\phi|\psi\rangle \leq \langle\psi|\psi\rangle\langle\phi|\phi\rangle \quad . \end{aligned} \tag{9}$$

Die Aussage der Ungleichung soll möglichst stark sein, dazu suchen wir das maximale $(d^* + d - d^*d)$. Mit der Definition

$$d \equiv a + ib \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R} \tag{10}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (d^* + d - d^*d) &= a - ib + a + ib - a^2 - b^2 \\ &= 2a - a^2 - b^2 \\ &\text{ist maximal für } b = 0 \text{ und } d = a = 1 \quad , \end{aligned} \tag{11}$$

womit die Schwarz'sche Ungleichung (4) bewiesen ist.

2.2. Operatoren

Eine Abbildung

$$\begin{aligned} A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ A|\psi\rangle = |\phi\rangle \ \text{ mit } |\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H} \end{aligned} \tag{12}$$

wird als Operator bezeichnet. Häufig werden wir auch folgende Schreibweise verwenden:

$$|A\psi\rangle \equiv A|\psi\rangle \tag{13}$$

Wenn das untersuchte physikalische System durch den Zustandsvektor $|\psi\rangle$ beschrieben wird, dann ist der Erwartungs- oder Mittelwert des Operators A als

$$\langle A\rangle_\psi \equiv \frac{\langle\psi|A\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \in \mathbb{C} \tag{14}$$

definiert. Um die Schreibarbeit zu vereinfachen, werden wir im Folgenden ausschliesslich normierte Zustandsfunktionen verwenden, die durch $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ definiert sind. (14) vereinfacht sich dann zu

$$\langle A\rangle_\psi \equiv \langle\psi|A\psi\rangle \in \mathbb{C} \quad . \tag{15}$$

Jedem Operator A ist ein adjungierter Operator A^+ durch die Relation

$$\langle A^+\phi|\psi\rangle \equiv \langle\phi|A\psi\rangle \tag{16}$$

zugeordnet.

2.3. Hermitesche Operatoren

Falls $A^+ = A$ ist, so wird A als selbstadjungiert oder hermitesch bezeichnet.

$$\text{Definition:} \quad A \text{ ist hermitesch} \iff A^+ = A \tag{17}$$

Wir werden jetzt zeigen: Der Erwartungswert eines Operators ist für beliebige Zustandsfunktionen genau dann reell, wenn der Operator hermitesch ist.

$$\langle A\rangle_\psi \equiv \langle\psi|A\psi\rangle \in \mathbb{R} \quad \iff \quad A^+ = A \tag{18}$$

Zunächst zeigen wir, dass der Erwartungswert eines hermiteschen Operators A notwendig reell ist, indem wir zeigen dass $\langle A\rangle_\psi = \langle A\rangle_\psi^*$ gilt:

$$\langle A\rangle_\psi \overset{(15)}{=} \langle\psi|A\psi\rangle \overset{(16)}{=} \langle A^+\psi|\psi\rangle \overset{(17)}{=} \langle A\psi|\psi\rangle \overset{(2a)}{=} \langle\psi|A\psi\rangle^* \overset{(15)}{=} \langle A\rangle_\psi^* \tag{19}$$

Nur geringfügig schwieriger ist die umgekehrte Richtung des Beweises. Wir haben zu zeigen, dass A hermitesch ist, falls sein Erwartungswert für beliebige Zustandsfunktionen reell ist. Dazu berechnen wir den Erwartungswert $\langle A\rangle_\chi$ für den Zustand $|\chi\rangle \equiv |\psi\rangle + c|\phi\rangle$ mit $c \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\langle A\rangle_\chi &\overset{(15)}{=} \langle\chi|A\chi\rangle \\ &\overset{(2c)}{=} \langle\psi|A\psi\rangle + c^*\langle\phi|A\psi\rangle + c\langle\psi|A\phi\rangle + c^*c\langle\phi|A\phi\rangle\end{aligned} \tag{20}$$

Wir haben $\langle A\rangle_\chi \in \mathbb{R}$ für beliebige Zustandsfunktionen vorausgesetzt. Der erste und der vierte Summand auf der rechten Seite von (20) sind also auf jeden Fall reell. Also ist auch der Rest von (20) reell und demzufolge gleich seinem konjugiert komplexen:

$$\begin{aligned}c^*\langle\phi|A\psi\rangle + c\langle\psi|A\phi\rangle &= c\langle\phi|A\psi\rangle^* + c^*\langle\psi|A\phi\rangle^* \\ &\overset{(2a)}{=} c\langle A\psi|\phi\rangle + c^*\langle A\phi|\psi\rangle\end{aligned} \tag{21}$$

Alternativ können wir die beiden Summanden auch mithilfe des adjungierten Operators A^+ schreiben:

$$c^*\langle\phi|A\psi\rangle + c\langle\psi|A\phi\rangle \overset{(16)}{=} c^*\langle A^+\phi|\psi\rangle + c\langle A^+\psi|\phi\rangle \tag{22}$$

Nur wenn A hermitesch ist sind (21) und (22) für beliebige ψ, ϕ, c gleichzeitig erfüllt:

$$\langle A\rangle_\chi \in \mathbb{R} \overset{(21),(22)}{\Longrightarrow} A^+ = A \quad \overset{(17)}{\equiv} \quad A \text{ ist hermitesch.} \tag{23}$$

2.4. Antihermitesche Operatoren

Als letzten Schritt der Vorbereitung für unser eigentliches Thema beweisen wir jetzt noch, dass der Kommutator zweier hermitescher Operatoren antihermitesch und sein Erwartungswert für beliebige Zustandsfunktionen imaginär ist. Dazu definieren wir zunächst, was wir unter einem antihermiteschen Operator C verstehen:

$$\text{Definition:} \quad C \text{ ist antihermitesch} \iff C^+ = -\,C \tag{24}$$

Wir betrachten den Kommutator zweier hermitescher Operatoren:

$$(AB - BA) \quad \text{mit } A^+ = A \text{ und } B^+ = B \tag{25}$$

Der Erwartungswert von $(AB - BA)$ für eine beliebige Zustandsfunktion $|\psi\rangle$ ist

$$\begin{aligned}
\langle\psi|(AB-BA)\psi\rangle &\overset{(2c)}{=} \langle\psi|AB\psi\rangle - \langle\psi|BA\psi\rangle \\
&\overset{(16)}{=} \langle A^+\psi|B\psi\rangle - \langle B^+\psi|A\psi\rangle \\
&\overset{(16)}{=} \langle B^+A^+\psi|\psi\rangle - \langle A^+B^+\psi|\psi\rangle \\
&\overset{(2c)}{=} -\langle(A^+B^+ - B^+A^+)\psi|\psi\rangle \\
&\overset{(25)}{=} -\langle(AB-BA)\psi|\psi\rangle \\
&\overset{(16)}{=} \langle(AB-BA)^+\psi|\psi\rangle \\
&\Longrightarrow \quad (AB-BA)^+ = -(AB-BA) \quad ,
\end{aligned} \tag{26}$$

also ist der Kommutator zweier hermitescher Operatoren antihermitesch. Der Erwartungswert eines beliebigen antihermiteschen Operators ist für beliebige Zustandsfunktionen imaginär:

$$\begin{aligned}
&\langle C\rangle_\psi = \langle\psi|C\psi\rangle = \langle C^+\psi|\psi\rangle = -\langle C\psi|\psi\rangle = -\langle\psi|C\psi\rangle^* = -\langle C\rangle_\psi^* \\
&\qquad\Longrightarrow \quad \langle C\rangle_\psi \text{ ist imaginär, wenn } C^+ = -\,C \quad .
\end{aligned} \tag{27}$$

3. Unbestimmtheit

Die Quantentheorie ordnet jeder messbaren Grösse einen hermiteschen Operator zu. Wenn einer bestimmten Grösse der Operator A zugeordnet ist und das untersuchte physikalische Objekt sich im Zustand $|\psi\rangle$ befindet, dann wird die Messung dieser Grösse im Mittel gleich dem Erwartungswert

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A\psi\rangle \quad \in \mathbb{R} \tag{28}$$

sein. „im Mittel" bedeutet dabei, dass im Allgemeinen nicht jede Messung den Wert $\langle A\rangle_\psi$ ergeben wird. Vielmehr werden bei wiederholter Messung die Messwerte mehr oder weniger stark um $\langle A\rangle_\psi$ streuen, und nur der Mittelwert sehr vieler Messungen wird gleich $\langle A\rangle_\psi$ sein.

Wir suchen jetzt ein geeignetes Mass, um die Streuung der Messwerte um ihren Mittelwert zu quantifizieren. Ein ungeeignetes Mass wäre die mittlere Abweichung vom Mittelwert, denn die ist Null:

$$\langle A - \langle A\rangle_\psi\rangle_\psi = \langle A\rangle_\psi - \langle\langle A\rangle_\psi\rangle_\psi = \langle A\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi = 0 \tag{29}$$

Ein brauchbares Mass ist dagegen die mittlere quadratische Abweichung:

$$\begin{aligned}\langle\,(A - \langle A\rangle_\psi)^2\,\rangle_\psi &= \langle\,A^2 - 2A\langle A\rangle_\psi + \langle A\rangle_\psi^2\,\rangle_\psi \\ &= \langle A^2\rangle_\psi - 2\langle A\rangle_\psi\langle A\rangle_\psi + \langle A\rangle_\psi^2 \\ &= \langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2\end{aligned} \tag{30}$$

Als Mass für die Streuung ΔA_ψ der Messwerte um den Mittelwert im Zustand ψ verwenden wir deshalb die

$$\text{Definition:}\quad \Delta A_\psi \equiv {}_{+}\sqrt{\langle\,(A - \langle A\rangle_\psi)^2\,\rangle_\psi} = {}_{+}\sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2} \tag{31}$$

4. Unbestimmtheitsrelation

A und B seien hermitesche Operatoren. Wir definieren die ebenfalls hermiteschen Operatoren

$$A' \equiv A - \langle A\rangle_\psi \quad \text{und} \quad B' \equiv B - \langle B\rangle_\psi \quad , \tag{32}$$

und den Zustandsvektor

$$|\,(A' + irB')\,\psi\rangle \quad \text{mit } r \in \mathbb{R} \tag{33}$$

Nach (2b) gilt

$$\langle\,(A' + irB')\,\psi\,|\,(A' + irB')\,\psi\,\rangle \geq 0 \quad . \tag{34}$$

Weil A' und B' hermitesch sind, folgt

$$\begin{aligned}
&\langle\,\psi\,|\,(A' - irB')(A' + irB')\,\psi\,\rangle \geq 0 \\
&\langle\,A'^2 - irB'A' + irA'B' + r^2B'^2\,\rangle_\psi \geq 0 \\
&\underbrace{\langle A'^2\rangle_\psi}_{(\Delta A_\psi)^2} + ir\langle A'B' - B'A'\rangle_\psi + r^2\,\underbrace{\langle B'^2\rangle_\psi}_{(\Delta B_\psi)^2} \geq 0
\end{aligned} \tag{35}$$

Da, wie man leicht nachrechnet, $\langle A'B' - B'A'\rangle_\psi = \langle AB - BA\rangle_\psi$ ist, folgt

$$(\Delta A_\psi)^2 + ir\langle AB - BA\rangle_\psi + r^2(\Delta B_\psi)^2 \geq 0 \tag{36}$$

Alle Summanden in dieser Ungleichung sind reell, auch der zweite. Denn nach (27) ist der Erwartungswert des Kommutators zweier hermitescher Operatoren imaginär. Addition der reellen Zahl $(-ir\langle AB - BA\rangle_\psi - r^2(\Delta B_\psi)^2)$ zur Ungleichung ergibt

$$(\Delta A_\psi)^2 \geq -ir\langle AB - BA\rangle_\psi - r^2(\Delta B_\psi)^2 \tag{37}$$

Um die Form einer Unbestimmtheitsrelation zu erhalten, wollen wir mit $(\Delta B_\psi)^2$ multiplizieren. Das ist nur sinnvoll, wenn ΔB_ψ weder Null noch unendlich ist. Deshalb lassen wir für ΔA_ψ beliebige Werte zu, machen aber für ΔB_ψ vorläufig eine Einschränkung:

$$0 \leq \Delta A_\psi \leq \infty \quad \text{und} \quad 0 < \Delta B_\psi < \infty \tag{38}$$

Aufgrund dieser Einschränkung können wir (37) mit $(\Delta B_\psi)^2$ multiplizieren, und erhalten

$$(\Delta A_\psi)^2(\Delta B_\psi)^2 \geq -ir\langle AB - BA\rangle_\psi(\Delta B_\psi)^2 - r^2(\Delta B_\psi)^4 \equiv f \quad . \tag{39}$$

Damit die Aussage der Ungleichung möglichst stark wird, wollen ihre rechte Seite, die wir als f bezeichnet haben, durch geeignete Festlegung von $r \in \mathbb{R}$ möglichst gross wählen. Wir suchen also das Maximum von $f(r)$, und setzen dazu die Ableitung von f nach r gleich Null:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial r} &= -i\langle AB - BA\rangle_\psi(\Delta B_\psi)^2 - 2r(\Delta B_\psi)^4 = 0 \\ r &= -\frac{i}{2}\frac{\langle AB - BA\rangle_\psi}{(\Delta B_\psi)^2} \end{aligned} \tag{40}$$

Erneut hat sich die Einschränkung (38) bewährt.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = -2(\Delta B_\psi)^4 < 0 \quad , \tag{41}$$

der Extremwert von f ist also tatsächlich ein Maximum. Wir setzen r in (39) ein:

$$(\Delta A_\psi)^2(\Delta B_\psi)^2 \geq +\frac{1}{4}(i\langle AB - BA\rangle_\psi)^2 \tag{42}$$

Radizieren ergibt

$$\Delta A_\psi \cdot \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} \big| \langle AB - BA \rangle_\psi \big| \tag{43}$$

Das ist die von Robertson angegebene [2] Formulierung der Unbestimmtheitsrelation. Wir haben sie unter der einschränkenden Voraussetzung (38) hergeleitet, von der wir uns jetzt lösen wollen.

Die Varianzen $s = \Delta A_\psi$ bzw. $s = \Delta B_\psi$ können die Werte $s = 0$, $0 < s < \infty$, oder $s = \infty$ annehmen, und es ist wegen der Symmetrie von (43) egal, ob ΔA_ψ den einen Wert und ΔB_ψ den anderen Wert hat, oder ob ΔA_ψ den anderen Wert und ΔB_ψ den einen Wert hat. Insgesamt gibt es 6 Kombinationsmöglichkeiten:

(a) $0 < s < \infty$ kombiniert mit $s = 0$
(b) $0 < s < \infty$ kombiniert mit $0 < s < \infty$
(c) $0 < s < \infty$ kombiniert mit $s = \infty$
(d) $s = \infty$ kombiniert mit $s = \infty$
(e) $s = 0$ kombiniert mit $s = 0$
(f) $s = 0$ kombiniert mit $s = \infty$

(a),(b), und (c) haben wir bei der Herleitung von (43) bereits berücksichtigt, für diese ist also die Formel bewiesen. Für (d) ist (43) trivialerweise richtig. Bleiben noch (e) und (f) zu untersuchen. Diese Fälle behandeln wir nicht mathematisch, sondern physikalisch. (a) und (c) sind bewiesen, egal wie klein die von Null verschiedene Varianz sein mag. Niemand kann den Unterschied zwischen „beliebig klein“ und „exakt Null“ messtechnisch nachweisen. Und eine Differenz, die prinzipiell nicht messbar ist, ist physikalisch nicht relevant, sondern allenfalls für die reine Mathematik von Interesse.

Aus physikalischer Sicht wäre es deshalb Unfug, irgendeinen Unterschied zwischen „s beliebig klein“ und „$s = 0$“ zu machen. Wir brauchen also (e) und (f) mit $s = 0$ nicht mehr eigens zu untersuchen, sondern haben mit dem Ergebnis für (a) und (c) mit „s beliebig klein“ bereits alle physikalisch relevanten Informationen in der Hand.

Aus physikalischer Sicht ist (43) für beliebige hermitesche Operatoren A und B, und für beliebige Zustandsfunktionen ψ gültig, vorausgesetzt dass die im Abschnitt 2 skizzierten Grundlagen der Quantentheorie eine korrekte Beschreibung der Natur darstellen. Wir stellen also abschliessend fest:

> Für beliebige hermitesche Operatoren A und B, und für beliebige Zustandsfunktionen ψ gilt:
>
> $$\Delta A_\psi \cdot \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2} |\langle AB - BA \rangle_\psi| \tag{44}$$
>
> ΔA_ψ und ΔB_ψ sind dabei gemäss (31) definiert.

Literatur

[1] Werner Heisenberg: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik*
Zeits. Phys. **43**, 172-198 (1927)
http://osulibrary.oregonstate.edu/specialcollections/coll/pauling/bond/papers/corr155.1.html

[2] Howard Percy Robertson: *The Uncertainty Principle*
Phys. Rev. **34**, 163-164 (1929)